

COURS ET EXERCICES DE MATHEMATIQUES PARTIE 1 1998-2011

2 PC
Premier semestre
Version 2011

Cours
Exercice

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

FORMATION

Auteur de la Ressource Pédagogique
PICQ Martine

membre de UNIVERSITÉ DE LYON

INSA LYON



MATHEMATIQUES

Cours et exercices de Mathématiques
Deuxième année - premier semestre
1998-2011

martine.picq@insa-lyon.fr

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Ce document est contitué de diverses notes, des exercices et de quelques sujets d'examens qui accompagnent un cours de mathématiques donné depuis 1998 en seconde année de premier cycle à l'INSA de Lyon. Toutes les remarques permettant d'améliorer ce document seront bienvenues.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Table des matières

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Chapitre 1

EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES

Sommaire

1.1 COURS

1.1.1 Introduction

1.1.1.1 Résumé

Ce cours propose l'étude d'une forme particulière d'équations différentielles que sont les équations différentielles linéaires et ceci en trois temps.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

1. Tout d'abord en commençant par l'étude des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 : théorème de Cauchy-Lipschitz, structures algèbriques de l'ensemble des solutions, boîte à outils techniques des méthode de variation de la constante et des coefficients indéterminés..
2. Puis en abordant l'étude plus générale des systèmes différentiels linéaires - c'est à dire des équations différentielles linéaires où l'inconnue est une fonction vectorielle : examen du problème de Cauchy, structure algébrique de l'ensemble des solutions. Formule de représentation dans le cas particulier des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.
3. En appliquant enfin ces résultats à l'étude des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n, puis en donnant quelques **techniques** de résolution applicables à certaines équations à coefficients constants et dont la connaissance est **indispensable** en physique.

1.1.1.2 Positionnement mathématique

Cette écologie restreinte ne doit pas faire oublier que, la plupart du temps, le processus de variation d'un phénomène, est « modélisé »par une équation différentielle non linéaire. Ainsi l'équation de Newton exprimant la position d'un corps P_i de masse m_i soumis à la force d'attraction de (n-1) autres corps $P_1..P_{i-1}\ldots P_n$ représentée à l'instant t par un vecteur $y_i(t)$ est une équation différentielle non linéaire qui s'écrit :

$$m_i y"_i(t) = G \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{y_j(t) - y_i(t)}{\parallel y_i(t) - y_i(t) \parallel^3}$$

On ne sait toujours pas maîtriser ce type de conditions écrite pourtant dès 1687 dans les Principia : personne n'avait imaginé les solutions correspondant aux entrelacements dans les anneaux de Saturne avant leur découverte expérimentale, et personne ne sait si ces solutions sont génériques ou exceptionnelles.
L'approche développée dans ce cours ne pourra pas être directement exportée dans le vaste monde des équations différentielles même dans les cas favorables où l'existence, voire l'unicité de solutions, peut être établie. Les mathématiciens ont actuellement développé des **méthodes qualitatives** d'étude des solutions qui consistent à décrire, sans chercher de formule explicite, les propriétés d'éventuelles solutions directement à partir de la forme de l'équation

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

différentielle et des **méthodes quantitatives** qui consistent à chercher des algorithmes pour approximer les solutions.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

1.1.2 Equations linéaires scalaires d'ordre 1

Etant donnés un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux applications supposées continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on note A une primitive de a sur I et y_0 un élément de $\mathbb{K}$.

On note $(\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}), +\cdot)$ l'espace vectoriel des fonctions continûment dérivables de I dans $\mathbb{K}$.

1.1.2.1 Définitions

Exemple 1.1.1.

Definition 1.1.

Soit y une application de I dans $\mathbb{K}$. Nous dirons que y est ***solution sur I de l'équation différentielle*** *$(\mathcal{E})$ $y' = ay + b$ si elle est dérivable sur I et si :*

$$\forall t \in I \qquad y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

La recherche d'une solution sur I de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ qui prenne en un point t_0 de I la valeur initiale y_0 constitue le ***problème de Cauchy*** *relatif à la* ***condition initiale*** *$y(t_0) = y_0$. Il est défini par :*

$$t \in I \qquad \begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Definition 1.2.

Une telle équation différentielle est dite :

- ***ordinaire*** *car la fonction inconnue est une fonction d'une seule variable*

- ***du premier ordre*** *car elle exprime une relation entre y'(t), valeur de la dérivée première de y en t, y(t)et t.*

- ***linéaire*** *car elle a pu être explicitée sous la forme canonique y'(t)=f(y(t),t) où f vérifie f(y(t),t)= a(t)y(t)+ b(t), où les coefficients a(t) et b(t) ne dépendent que de la variable t et pas de y.*

- ***à coefficients constants*** *lorsque de plus le coefficient a est constant, indépendant de t.*

- ***homogène*** *lorsque b est l'application nulle sur I.*

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

1.1.2.2 Etude théorique

1.1.2.3 Cauchy Lipschitz linéaire - facteur intégrant

Théorème 1.1. *théorème de Cauchy Lipschitz dans le cas linéaire scalaire*

Si les applications a et b sont ***continues*** *sur l'intervalle I alors le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = ay + b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une et une seule solution sur I donnée par la formule de représentation suivante :

$$\forall t \in I \quad y(t) = \underbrace{e^{A(t)-A(t_0)} y_0}_{solution\, de\, y'=ay\, valeur\, y_0\, en\, t_0} + e^{A(t)} \underbrace{\left(\int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s) ds \right)}_{solution\, de\, y'=ay+b\, valeur\, 0\, en\, t_0} \qquad (1.1)$$

Remarque 1.1.1. on peut écrire :

$$y(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(u)du} b(s)\, ds = e^{A(t)-A(t_0)}\, y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(A(t)-A(s))} b(s) ds$$

démonstration. Méthode du facteur intégrant
Remarquons que :

$$\forall t \in I\, y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \quad \Leftrightarrow \quad e^{-A(t)} \big(y'(t) - a(t)y(t) \big) = e^{-A(t)} b(t)$$

Cette écriture est motivée par la remarque que si y est dérivable sur I, alors ye^{-A} est dérivable sur I et a pour dérivée $(y' - ay)e^{-A}$. En multipliant par le terme $e^{-A(t)}$, appelé **facteur intégrant**, l'équation différentielle se réduit à une quadrature, en effet l'égalité précédente s'écrit :

$$\forall t \in I \quad (\underbrace{e^{-A} y})'(t) \quad = \quad e^{-A(t)} b(t) \qquad (1.2)$$

$(e^{-A}y)$ est donc la primitive de $(e^{-A}b)$ qui prend en t_0 la valeur $e^{-A(t_0)} y_0$:

$$\forall t \in I, \qquad (e^{-A}y)(t) = e^{-A}(t)y(t) = e^{-A(t_0)} y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(u)} b(u) du$$

□

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exemple 1.1.2. : On suppose que $I = \mathbb{R}$. Ecrire l'équation différentielle linéaire du premier ordre obtenue pour $a(t) = 2t$ et $b(t) = 1$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy défini par la condition initiale y(0)=0. Vous remarquerez que la solution ne peut pas être exprimée à l'aide de fonctions élémentaires, elle s'écrit très simplement à l'aide d'une "fonction spéciale", la fonction d'erreur définie par $t \mapsto \text{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-s^2} ds$, dont on ne connaît que quelques valeurs exactes.[1]

1.1.2.4 Conséquences

La formule de représentation (1.1) donne une méthode de calcul exact ou approché mais permet aussi de bien voir la structure de l'ensemble des solutions, comment elles dépendent de la condition initiale, du second membre b.

Proposition 1. *structure vectorielle des solutions dans le cas homogène*
Toute solution de l'équation différentielle $y'(t) = a(t)y(t)$ vérifiant une condition initiale en t_0 s'écrit : $t \mapsto C\ e^{A(t)} \quad C \in \mathbb{K}$, et décrit la droite vectorielle engendrée par l'application $(t \in I \mapsto e^{A(t)})$ lorsque la valeur initiale décrit $\mathbb{K}$. On dit que $t \mapsto e^{A(t)}C\ C \in \mathbb{K}$ est la solution générale de l'équation homogène $y' = a(t)y$.

démonstration. : Cela résulte du théorème (1.1) et de la formule (1.1) avec $C = e^{-A(t_0)}y(t_0)$. □

1.1.2.4.1 Méthode de variation de la constante

Cet oxymore met en valeur une technique de calcul qui permet de retrouver les deux primitivations de la formule de représentation, tout en évitant de retenir cette formule. Elle se déroule de la manière suivante :

[1] Nous verrons que erf(t) peut être évaluée à l'aide de son développement en série $\text{erf}(t) = t - \frac{t^3}{3 \cdot 3!} + \frac{t^5}{5 \cdot 5!} + \cdots$ ainsi $\text{erf}(1.0) \simeq 0.8427007794$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Pour résoudre le problème de Cauchy $y' = a(t)y + b(t) \quad y(t_0) = y_0$:

1. On calcule une primitive A de a sur I et on écrit la solution générale de l'équation homogène $y' = a(t)y$:

$$t \mapsto e^{A(t)}C \quad C \in \mathbb{K}.$$

2. On met en oeuvre la variation de la constante[a], en cherchant y sous la forme
$$y(t) = e^{A(t)}C(t).$$
On retrouve, en calculant la dérivée du produit $e^{A(t)}C(t)$, le résultat donné par (1.2) et C est déterminée par $e^{A(t)}C'(t) = b(t)$ et $C(t_0)$, d'où :
$$C'(t) = e^{-A(t)}b(t) \quad \text{et} \quad C(t_0) = e^{-A(t_0)}y_0.$$

[a]Ici interprétée comme un changement de fonction inconnue, la nouvelle fonction inconnue étant $t \mapsto C(t)$

démonstration. : en cours □

Proposition 2. *structure affine des solutions de l'équation complète $(\mathcal{E})$*
Soit φ_0 une solution sur I de l'équation différentielle linéaire $y'(t) = a(t)y(t)+b(t)$, alors toute solution sur I de cette équation, s'écrit sous la forme $y(t) = \varphi_0 + C\ e^{A(t)}$ où C est un élément de $\mathbb{K}$.
On dit que φ_0 est une solution particulière de $y' = ay + b$ et que la solution générale de $y' = ay + b$ est la somme de la solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée, $y' = ay$.

démonstration. : Si $\varphi_0(t) = C_0 e^{A(t)} + (\int\limits_{t_0}^{t} b(s)e^{(A(t)-A(s))})ds)$, alors

$$C = y(t_0)e^{-A(t_0)} - C_0$$

□

1.1.2.4.2 Cas $x'(t) = ax(t) + P(t)e^{rt}$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Théorème 1.2. *Méthode de coefficients indéterminés*

Si a est contstant et si $b(t)$ est de la forme $P(t)e^{rt}$ où P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, on peut chercher une solution particulière de l'équation

$$t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} y'(t) = ay(t) + P(t)e^{rt} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

sous la forme

si $r \neq a$ $\quad Q(t) \cdot e^{rt}$ $\quad$ *si* $r = a$ $\quad t \cdot Q(t) \cdot e^{rt}$

où Q est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ de même degré que P

démonstration. C'est une méthode de coefficients indéterminée dont la démonstration s'appuie sur cette règle du calcul des primitives : Si $m \neq 0$ $\quad P(t)e^{mt}$ a une primitive de la forme $Q(t)e^{mt}$ où Q est un polynôme de même degré que P. Si $m = 0$ la primitive de P nulle en 0 est un polynôme de la forme tQ où Q est un polynôme de degré p. □

En conséquence, la solution cherchée, selon (2) est de la forme

si $r \neq a$ $\quad ke^{at} + Q(t) \cdot e^{rt}$ $\quad$ si $r = a$ $\quad ke^{at} + t \cdot Q(t) \cdot e^{rt}$

où k est une constante que l'on calcule en prenant en compte la condition initiale.

Principe de superposition lorsque b s'écrit comme somme de termes b_i tels que l'on connaît φ_i solution sur I de $y' = ay + b_i(t)$:
Supposons $b = b_1 + b_2$ où b_1 et b_2 sont continues sur l'intervalle I. Si φ_1 et φ_2 sont respectivement solutions sur I de $y' = ay + b_1(t)$ et $y' = ay + b_2(t)$ alors $(\varphi_1 + \varphi_2)$ est solution sur I de $y' = ay + b(t)$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

1.1.3 Equations linéaires vectorielles d'ordre 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, b une application vectorielle de I dans $\mathbb{K}^n$ où $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et où n est un entier naturel non nul. Soit $t \in I \mapsto a(t)$ une application de I dans $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, $a(t)$ est donc un endomorphisme de $\mathbb{K}^{\mathsf{n}}$. On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$, l'espace vectoriel des applications continûment dérivables de I dans $\mathbb{K}^n$, on se donné enfin un élément $t_0 \in I$ et $y^0 \in \mathbb{K}^n$.

rappel :
Dire que $y = (y_1, y_2.., y_n)$ est dérivable sur I, c'est dire que chacune des applications coordonnées $y_i \quad 1 \leq i \leq n$ est dérivable sur I. La dérivée de y est alors l'application vectorielle, notée y', définie par $y' = (y_1', y_2'.., y_n')$.

Exemple 1.1.3. :
Sur $I = \mathbb{R}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $n = 4$ vérifier que l'application inconnue $t \mapsto y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t))$ à valeurs dans $\mathbb{C}^4$ vérifie l'égalité vectorielle $\forall t \in I \quad y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t)$ où $a(t)$ est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ de matrice $M(t)$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^4$ et $b(t)$ le vecteur de matrice coordonnée $B(t)$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^4$

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4t \end{pmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} t+1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si et seulement si ses coordonnées satisfont l'ensemble des quatre égalités, qui forme ce qu'on appelle le système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{llllll} y_1'(t) = & y_1(t) & & & & +1 + \ t \\ y_2'(t) = & & 2y_2(t) & & & +2 \\ y_3'(t) = & & & 3y_3(t) & & \\ y_4'(t) = & & & & 4ty_4(t) & \end{array} \right. \tag{1.3}$$

Vérifier que toute solution sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}^4$ de ce système peut s'écrire sous la forme :

$$\{\alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{2\,t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma e^{3\,t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta e^{2\,t^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t-2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4\}$

Déterminer la solution qui prend en $t_0 = 0$ la valeur $y^0 = (1, 0, 0, 0)$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

1.1.3.1 Définitions

On généralise les définitions données dans le cas scalaire[1]

Definition 1.3.

Soit y une application de I dans $\mathbb{K}^n$. Nous dirons que y est ***solution sur I de l'équation différentielle*** *$(\mathcal{E})$ $y' = a(t) \cdot y + b$ si y est dérivable sur I et si :*

$$\forall t \in I \qquad y'(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t) \tag{1.4}$$

La recherche de la solution sur I de (1.4) qui prenne en t_0 la valeur y^0 constitue le ***problème de Cauchy*** *défini sur I par (1.4) pour la* ***condition initiale*** *$y(t_0) = y^0$.*

$$\begin{cases} \forall t \in I \quad y'(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t) \\ \qquad\qquad y(t_0) = y^0. \end{cases} \tag{1.5}$$

L'égalité vectorielle qui caractérise l'équation différentielle (1.4) peut être écrite **matriciellement** avec la matrice colonne $Y(t)$ du vecteur $y(t)$ et celle $Y'(t)$ du vecteur $y'(t)$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ sous la forme :

$$\forall t \in I \quad Y'(t) = M(t)Y(t) + B(t) \tag{1.6}$$

avec

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & \dots & a_{1,n}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) & \dots & a_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(t) & a_{n,2}(t) & \dots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

Elle peut aussi être écrite en fonction des applications coordonnées y_i sous forme du **système différentiel** :

$$\forall t \in I \begin{cases} y_1'(t) = a_{1,1}(t)y_1(t) + a_{1,2}(t)y_2(t) + \ldots + a_{1,n}(t)y_n(t) + b_1(t) \\ y_2'(t) = a_{2,1}(t)y_1(t) + a_{2,2}(t)y_2(t) + \ldots + a_{2,n}(t)y_n(t) + b_2(t) \\ \vdots + \vdots + + \vdots \\ y_n'(t) = a_{n,1}(t)y_1(t) + +a_{n,2}(t)y_2(t) + \ldots + a_{n,n}(t)y_n(t) + b_n(t) \end{cases} \tag{1.7}$$

On généralise immédiatement les définitions données dans le cas scalaire

[1] Soit v un vecteur de $\mathbb{K}^n$, on note $a \cdot v$, pour $a(v)$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Definition 1.4.

Une telle équation différentielle est dite :

*- **ordinaire** car la fonction vectorielle inconnue dépend d'une seule variable*

*- **du premier ordre** car elle exprime une relation entre y'(t), valeur de la dérivée première de y en t, y(t)et t.*

*- **linéaire** car elle a pu être explicitée sous la forme canonique y'(t)=f(y(t),t) où $y \mapsto f(y(t), t)$ est une application linéaire de y.*

*- **à coefficients constants** lorsque de plus l'endomorphisme a est constant, indépendant de t.*

*- **homogène** lorsque de plus b est l'application nulle.*

1.1.3.2 Preuves constructives dans le cas à coefficients contants

Il s'agit d'apprendre à calculer la solution d'un système différentiel à coefficients constants vérifiant une condition initiale donnée. On verra ultérieurement dans ce cours que tout système différentiel, linéaire ou non, peut être localement approché par un système différentiel linéaire à coefficients constants, ces résultats ont donc une grande importance.

1.1.3.2.1 Matrice diagonalisable dans $\mathbb{K}^n$ La méthode algèbrique donnée dans ce paragraphe est applicable dès que a est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ diagonalisable.
Nous supposons donc donnée une base $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de a et notons $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées, distinctes ou confondues.

Proposition 3.
Si v est vecteur propre sur $\mathbb{K}$ de l'endomorphisme a alors $t \mapsto e^{\lambda t} \cdot v$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

Théorème 1.3. *systèmes à coefficients constants diagonalisables*

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Supposons a diagonalisable dans $\mathbb{K}^n$ et b continue sur I, alors le problème de Cauchy (1.5) :

$$\begin{cases} \forall t \in I \quad y'(t) = a \cdot y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y^0. \end{cases}$$

admet une et une seule solution définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}^n$.
1. On obtient cette solution dans la base de vecteurs propres $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ en écrivant y, y_0 et b dans cette base :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{i=n} z_i(t) v_i \quad y^0 = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i v_i \quad b(t) = \sum_{i=1}^{i=n} \beta_i(t) v_i \tag{1.8}$$

2. y est solution du problème de Cauchy (1.5)si et seulement si chacune des cordonnées z_i est solution du problème de Cauchy linéaire d'ordre 1 scalaire.

$$\begin{cases} z'i(t) = \lambda_i z_i(t) + \beta_i(t) \\ z_i(t_0) = \alpha_i \end{cases} \tag{1.9}$$

La solution est :

$$t \in I \quad \mapsto \quad \sum_{i=1}^{i=n} \quad (\alpha_i \cdot e^{\lambda_i(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} \beta_i(s) e^{-\lambda_i s} ds \cdot e^{\lambda_i t}) \quad v_i \tag{1.10}$$

Exemple 1.1.4.

$$\begin{cases} y_1'(t) = & y_1(t) & -y_2(t) + 2 \\ y_2'(t) = & 2y_1(t) & -y_2(t) \\ (y_1(0) & , y_2(0)) = & (2, 2) \end{cases} \tag{1.11}$$

Prenons $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les valeurs propres de a sont $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$.

l'endomorphisme a de $\mathbb{C}^2$ est diagonalisable. Les vecteurs propres sont

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix}$$

b(t) s'écrit dans la base (v_1, v_2) :

$$b(t) = (1 - i)v_1 + (1 + i)v_2 \quad \text{soit} \quad \beta_1(t) = 1 - i \quad \beta_2(t) = 1 + i$$

$y(0)$ s'écrit dans la base (v_1, v_2) :

$$(y_1^0, y_2^0) = v_1 + v_2 \quad \text{soit} \quad \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Recherchons $y(t)$, écrit dans la base (v_1, v_2), sous la forme $y(t) = z_1(t)v_1 + z_2(t)v_2$. L'égalité $y'(t) = ay(t) + b(t)$ s'écrit

$$z_1'(t)v_1 + z_2'(t)v_2 = z_1(t)iv_1 + z_2(t)(-i)v_2 + (1-i)v_1 + (1+i)v_2$$

Nous avons ainsi substitué au système formé de deux équations couplées en y_1, y_2, le système en z_1, z_2 formé de deux équations linéaires du premier ordre "découplées" :

$$\left\{\begin{array}{llll} z_1'(t) & = iz_1(t) & & +1-i \\ z_2'(t) & = & -iz_2(t) & +1+i \\ (z_1(0), z_2(0)) & = (1,1) & & \end{array}\right. \tag{1.12}$$

Nous résolvons la première équation, par exemple avec la formule de représentation[1] :

$$\forall t \in I \quad z_1(t) = e^{it} + \int_0^t (1-i)e^{i(t-s)}ds$$

D'où :

$$z_1(t) = e^{it} + (1+i)(1-e^{it}) = -ie^{it} + 1 + i = 1 + \sin t + i(1-\cos t)$$

Or $z_2 = \overline{z_1}$ car z_2 est solution de l'équation conjuguée avec une condition initiale conjuguée.[2]Il vient :

$$y(t) = z_1(t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} + \overline{z_1(t)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

$$y(t) = 2\mathcal{R}e \begin{pmatrix} 1+\sin t + i(1-\cos t) \\ \big(1+\sin t + i(1-\cos t)\big)(1-i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1+\sin t) \\ 2(2+\sin t - \cos t) \end{pmatrix}.$$

démonstration.
Lorsque la matrice est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la démonstration résulte immédiatement de la formule (1.1) du théorème (1.1).
Lorsque a est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$[3] et que la valeur y^0 est dans $\mathbb{R}^n$,

[1] La méthode du facteur intégrant ou celle des équations scalaires à coefficients constants dont le second membre est de la forme $P(t) \exp rt$ sont applicables

[2] Ce qui se constate immédiatement en écrivant

$$z_2(t) = e^{-it} + \int_0^t (1+i)e^{-i(t-s)}ds.$$

[3] cas d'un système differentiel à coefficients réels

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

l'exemple précédent montre que si a n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}^n$ sans l'être dans $\mathbb{R}^n$, on travaille dans $\mathbb{C}$, mais la solution obtenue à la fin des calculs est réelle.
En effet, les valeurs propres et les vecteurs propres sont deux à deux conjugués. Les coordonnées des vecteurs réels b et y^0 relatives à des vecteurs conjuguées sont conjuguées, ce qui conduit à des équations deux à deux conjuguées

$$\begin{cases} z'i(t) = \lambda_i z_i(t) + \beta_i(t) \\ z_i(t_0) = \alpha_i \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z'i(t) = \overline{\lambda}_i z_i(t) + \overline{\beta}_i(t) \\ z_i(t_0) = \overline{\alpha_i} \end{cases}$$

dont les solutions sont conjuguées et la somme est réelle. □
Le théorème suivant concerne le cas particulier des systèmes différentiels homogènes à coefficients constants de matrice diagonalisable. Lorsque b est nul, (1.10) donne l'expression de la solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = a\,y$ qui prend en t_0 la valeur $y^0 = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i v_i$. Lorsque y^0 décrit $\mathbb{K}^n$, on obtient l'ensemble des solutions.

Théorème 1.4. *systèmes homogènes à coefficients constants diagonalisables*

Supposons que l'endomorphisme a de $\mathbb{K}^n$ soit diagonalisable, et que $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ soit une base de vecteurs propres de a, respectivement associés aux valeurs propres $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, alors la solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = a\,y$ qui prend en t_0 la valeur $y^0 = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i v_i$ devient :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i e^{\lambda_i (t-t_0)} v_i. \tag{1.13}$$

L'ensemble des solutions[a] *sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ du système homogène $y'(t) = ay(t)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n. Une base de cet espace vectoriel est donc :*

$$(e^{\lambda_1 t} v_1\,,\, e^{\lambda_2 t} v_2\,, \cdots ,\, e^{\lambda_n t} v_n)$$

[a] On dit encore que la solution générale à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ de ce système homogène est :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i e^{\lambda_i t} \cdot v_i \quad \text{où} \qquad \alpha_i \in \mathbb{K}.$$

démonstration.
(1.13) se déduit immédiatement de (1.10). Il suffit d'utiliser l'égalité (1.13) pour $t_0 = 0$. Lorsque la condition initiale décrit $\mathbb{K}^n$, le n-uplet $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

décrit $\mathbb{K}^n$ et la solution décrit

$$\{\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i e^{\lambda_i t} \cdot v_i \quad / \qquad \alpha_i \in \mathbb{K}.\}$$

Cet ensemble de solution coïncide avec l'espace vectoriel de dimension n engendré par les applications vectorielles $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\lambda_i t} v_i$. Toute solution (ou la solution générale) s'écrit comme combinaison linéaire sur $\mathbb{K}$ des applications vectorielles $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\lambda_i t} v_i$. □

Voici un cas où l'endomorphisme a n'est pas nécessairement diagonalisable et où il est cependant possible de calculer les solutions.

1.1.3.2.2 Matrice triangulaire Cette technique de calcul est générale car un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ peut toujours être représenté dans une base convenablement choisie par une matrice triangulaire. Lorsque a est triangulaire, elle ne suppose pas de connaissances particulières. Il suffit de remarquer que l'on peut résoudre successivement chacune des équations.
Technique de résolution en cascade d'un système différentiel triangulaire.

Supposons b continue sur I, si l'endomorphisme a de $\mathbb{K}^n$ est constant et défini par une matrice triangulaire alors le problème de Cauchy (1.5) :

$$\begin{cases} \forall t \in I \quad y'(t) = a \cdot y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y^0. \end{cases}$$

admet une et une seule solution définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}^n$.
On obtient cette solution en résolvant "en cascade" le système différentiel obtenu.

Montrons cette technique sur un exemple, soit à résoudre sur $\mathbb{C}^2$, λ étant un réel donné non nul, le système différentiel :

$$\begin{cases} z_1'(t) & = \lambda z_1(t) & +z_2(t) & +1 \\ z_2'(t) & = & \lambda z_2(t) & \\ (z_1(0), z_2(0)) & = (1,1) & & \end{cases} \tag{1.14}$$

équivaut à :

$$\begin{cases} z_2'(t) & = \lambda z_2(t) \\ z_2(0) & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow z_2(t) = e^{\lambda t}$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

et

$$\begin{cases} z_1'(t) & = \lambda z_1(t) \quad + e^{\lambda t} \quad +1 \\ z_1(0) & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow z_1(t) = (1 + \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} + t e^{\lambda t} - \frac{1}{\lambda})$$

1.1.3.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas général

Dans le cas où a n'est pas constant[1] il n'y a pas de technique générale de calcul des solutions, par contre il existe un théorème, le théorème de Cauchy-Lipschitz, qui assure l'existence et l'unicité de la solution, il sera établi ultérieurement dans ce cours.

Théorème 1.5. *théorème de Cauchy-Lipschitz existence et unicité*

Supposons a et b continues sur I, alors le problème de Cauchy (1.5) :

$$\begin{cases} \forall t \in I \quad y'(t) = a \cdot y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y^0. \end{cases}$$

admet une et une seule solution définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}^n$.

Conséquence :
En conséquence si le système à différentiel est à coefficients réels et si la condition initiale est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ il y a une solution dans $\mathbb{R}^n$ qui est aussi solution dans $\mathbb{C}^n$, c'est donc la solution dans $\mathbb{C}^n$. Nous avions obtenu ce résultat par le calcul algébrique dans le cas des coefficients constants, on peut le retenir sous la forme : La solution (réelle) d'un système différentiel donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz peut-être cherchée dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.

Lorsque la condition initiale y_0 décrit $\mathbb{K}^n$, la solution du problème de Cauchy décrit l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ de l'équation différentielle linéaire. Cet ensemble lorsque l'équation est homogène a une structure d'espace vectoriel.

Théorème 1.6. *structure vectorielle des solutions de l'équation $y' = a(t)\,y$*

[1] c'est à dire où a dépend de la variable t

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

L'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ de l'équation différentielle linéaire homogène $y' = a\ y$ est un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$. Pour tout t_0 dans $\mathbb{R}$, l'application

$$y \mapsto y(t_0)$$

définit un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_H$ sur $\mathbb{K}^n$.

démonstration.

1. t_0 étant un élément donné de I, l'application δ_0 de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ dans $\mathbb{K}^n$ qui à ϕ associe $\phi(t_0)$ est linéaire par définition des opérations sur les applications.
   De plus cette application définit une bijection de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_H$ des solutions à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ de $y' = ay$ sur $\mathbb{K}^n$ car, selon le théorème de Cauchy-Lipschitz (1.5), un élément quelconque y^0 de K^n admet un antécédent et un seul par δ_0.

□

On remarque pour un système différentiel à coefficients constants et de matrice diagonalisable, on dispose non seulement de ce résultat théorique concernant la forme de la solution mais aussi de l'expression de la solution qui en t_0 prend une valeur donnée, c'est à dire de l'isomorphisme inverse de $y \mapsto y(t_0)$: C'est l'égalité (1.10).

Conséquence :

Si on connaît n solutions $(\phi^1, \phi^2, \dots \phi^n)$ de l'équation homogène à valeurs dans $\mathbb{K}^n$. Elles forment une base de l'espace vectoriel des solutions à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ de l'équation homogène si et seulement si leurs images par l'isomorphisme δ_0, c'est à dire leurs valeurs en t_0 forment une base de $\mathbb{K}^n$, c'est à dire si et seulement si dét$[\phi^1(t_0), \phi^2(t_0), \dots \phi^n(t_0)]$ est non nul en un point t_0 de I. Ce résultat ne dépend pas du choix de t_0. En particulier le déterminant dét$[\phi^1(t), \phi^2(t), \dots \phi^n(t)]$ est alors non nul en tout point de I.[1]

En reprenant l'exemple (1.1.4) déjà étudié, le système différentiel homogène associé s'écrit :

Exemple 1.1.5.

$$\left\{ \begin{array}{lll} y_1'(t) & = y_1(t) & -y_2(t) \\ y_2'(t) & = 2y_1(t) & -y_2(t) \\ (y_1(0), y_2(0)) & = (2, 2) & \end{array} \right. \tag{1.15}$$

[1] L'image réciproque d'une base de $\mathbb{K}^n$ par l'application δ_0 introduite dans la démonstration du théorème (1.6) est une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Une base de l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}^2$ de ce système est :

$$(\varphi_1, \varphi_2) \qquad \text{où} \qquad \varphi_1(t) = e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = e^{-it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

Nous avons répondu à la question concernant l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}^2$, mais qu'en est-il pour l'espace vectoriel des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ dont nous savons d'après le théorème (1.6) que c'est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 ?

Remarquant que $C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $C_2 = \overline{C_1}$. Une telle solution s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients réels de $\mathcal{R}e(\varphi_1)$ et de $\mathcal{I}m(\varphi_1)$. On écrit

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t + i\sin t \\ \cos t + \sin t + i(\sin t - \cos t) \end{pmatrix}$$

Une base de l'espace vectoriel des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de ce système est :

$$(\phi_1, \phi_2) \qquad \text{où} \qquad \phi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}, \quad \phi_2(t) = e^{-it}\begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}$$

Remarque 1.1.2.
Si a est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont les valeurs propres ne sont pas toutes réelles, on pourra, comme dans l'exemple précédent, déduire de la base $(e^{\lambda_1 t}v_1..e^{\lambda_k t}v_k, e^{\mu_1 t}w_1, e^{\overline{\mu_1}t}\overline{w_1}, \cdots, e^{\mu_p t}w_p, e^{\overline{\mu_p}t}\overline{w_p})$ de l'espace vectoriel des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ la base

$$(e^{\lambda_1 t}v_1..e^{\lambda_k t}v_k, 2\mathcal{R}e(e^{\mu_1 t}w_1), 2\mathcal{I}m(e^{\mu_1 t}w_1), \cdots, 2\mathcal{R}e(e^{\mu_p t}w_p), 2\mathcal{I}m(e^{\mu_p t}w_p))$$

de l'espace vectoriel des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Et que devient le refrain bien connu "on obtient la solution générale de l'équation complète en ajoutant à la solution particulière la solution générale de l'équation homogène associée". Il reste vrai dans le cas vectoriel, c'est ce que signifie le théorème suivant :

Théorème 1.7. *structure affine des solutions de l'équation complète*

Soient $\mathcal{S}_H$ l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $y' = ay$ et ψ une solution de l'équation "complète" $y' = ay + b(t)$. L'ensemble des solutions de l'équation complète s'écrit $\{\phi + \psi / \phi \in \mathcal{S}_H\}$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

démonstration. en cours□

Théorème 1.8. *principe de superposition*

Si ψ^k est solution de l'équation $y' = ay + b_k(t)$ alors $\sum \psi^k$ est solution de l'équation $y' = ay + \sum b_k(t)$.

1.1.3.4 Compléments : Méthode de variation des constantes

Il existe une écriture vectorielle qui généralise la méthode de variations des constantes appliquée à chacune des équations du système (1.10) lorsque l'on cherche $z_i(t)$ sous la forme $p_i(t) \exp \lambda_i t$ en appliquant ce qui suit avec $\phi_i(t) = \exp \lambda_i t v_i$.

Méthode de variation des constantes

Soit $(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$ une base de l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des solutions à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ de l'équation homogène associée. On peut chercher les solutions de $(\mathcal{E})$ sous la forme

$$(t \mapsto \phi(t) = p_1(t)\phi_1(t) + p_2(t)\phi_2(t) + \ldots + p_n\phi_n(t))$$

ϕ est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement on a :

$$\forall t \in I \quad \forall i \in [1, n] \qquad p_i'(t) = q_i(t)$$

où $q_i(t)$ est la composante sur $\phi_i(t)$ de $b(t)$ écrit dans la base $(\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t))$ de $\mathbb{K}^n$.

Exemple 1.1.6. Soit à résoudre sur l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$,

$$\begin{cases} y_1'(t) = & & y_2(t) & \\ y_2'(t) = & -y_1(t) & & +\dfrac{1}{\cos 2t} \\ (y_1(0) & , y_2(0)) = & (1,1) & \end{cases} \tag{1.16}$$

en remarquant que $\phi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ et $\phi_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ forment une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène. Nous verrons en exercice (TD 1.26) que l'on peut, bien entendu, résoudre cet exercice par la méthode du théorème (1.3), les calculs sont identiques.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Eléments de réponse : en effet on vérifie immédiatement que ces applications à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ sont solutions du système homogène de plus les vecteurs $\phi_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\phi_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont indépendants donc (ϕ_1, ϕ_2) est une base de solutions comme image réciproque par l'application $y \mapsto y(0)$ d'une base de $\mathbb{R}^2$.
On cherche $y(t)$ sous la forme

$$\left| \begin{array}{cccc} y(t) & = p_1(t)\phi_1(t) & +p_2(t)\phi_2(t) & \\ y'(t) & = p_1(t)a\phi_1(t) & +p_2(t)a\phi_2(t) & +p_1'(t)\phi_1(t) + p_2'(t)\phi_2(t) \\ ay(t) + b(t) & = p_1(t)a\phi_1(t) & +p_2(t)a\phi_2(t) & +b(t) \end{array} \right.$$

Pour toute valeur de t, $(\phi_1(t), \phi_2(t))$ est une base de $\mathbb{R}^2$, on peut donc écrire $b(t)$ dans cette base :

$$b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{}{\cos 2t} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = -\frac{\sin t}{\cos 2t}, \beta = \frac{\cos t}{\cos 2t}$$

Il vient :

$$p_1'(t) = -\frac{\sin t}{2\cos^2 t - 1} \quad \text{et} \quad p_2'(t) = \frac{\cos t}{1 - 2\sin^2 t}$$

D'où :

$$p_1(t) = p_1(0) + \int_0^{\cos t} \frac{du}{2u^2 - 1} \quad p_2(t) = p_2(0) + \int_0^{\sin t} \frac{du}{1 - 2u^2}$$

Remarquant que $p_1(0) = 1$ et $p_2(0) = 1$, il vient :

$$p_1(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{1 + \sqrt{2}\cos t}{1 - \sqrt{2}\cos t} \quad p_2(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{1 + \sqrt{2}\sin t}{1 - \sqrt{2}\sin t}$$

$$y(t) = (1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{1 + \sqrt{2}\cos t}{1 - \sqrt{2}\cos t}) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + (1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{1 + \sqrt{2}\sin t}{1 - \sqrt{2}\sin t}) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

1.1.4 Equations linéaires scalaire d'ordre 2

On se donne un intervalle, I de $\mathbb{R}$ et trois applications de I dans $\mathbb{K}$, notées $a_i(t \mapsto a_i(t) 1 \leq i \leq 2)$ et b.

1.1.4.1 Définitions

Definition 1.5.

Une équation différentielle $(\mathcal{L})$ de la forme :

$$y" + a_1(t)y' + a_2(t)y = b(t) \quad (\mathcal{L})$$

est appelée ***équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2****.*
Une application φ est solution de $(\mathcal{L})$ sur I si elle est définie deux fois dérivable sur I et si :

$$\forall t \in I \quad \varphi"(t) + a_1(t)\varphi'(t) + a_2(t)\varphi(t) = b(t)$$

Si a_1 et a_2 sont indépendants de t, on dit que $\mathcal{L}$ est ***à coefficients constants****.*
Si b est nulle on dit que $\mathcal{L}$ est ***homogène****.*

1.1.4.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Une équation linéaire d'ordre 2 sur $\mathbb{K}$ équivaut à un système d'ordre 1 sur $\mathbb{K}^2$. Soit y une application n fois dérivable sur I, à tout réel t dans I, on associe le vecteur $z(t)$ de coordonnées $(y(t), y'(t))$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^2$.

$$y \in (\mathcal{C}^2(I,\mathbb{K}),+,.) \mapsto z \in ((\mathcal{C}^1(I,\mathbb{K}))^2,+,.) \quad / \quad Z = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

L'application Ψ qui à $y \in (\mathcal{C}^2(I,\mathbb{K}),+,.)$ associe $z \in ((\mathcal{C}^1(I,\mathbb{K}))^2,+,.)$ est linéaire injective De plus y est solution de l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 $(\mathcal{L})$, si et seulement si v est solution du système différentiel linéaire d'ordre 1, $(\mathcal{E})$ qui s'écrit matriciellement sous la forme :

$$V' = AV + B(t)$$

où

$$V = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

y solution de $(\mathcal{L}) \Longleftrightarrow \Psi(y) = z$ solution de $(\mathcal{E})$.

En conséquence la condition initiale $v(t_0) = v^0$ s'écrit sous la forme $y(t_0) = v_1^0$, et $y'(t_0) = v_2^0$.

Definition 1.6.

On associe à l'équation $(\mathcal{L})$, le problème :

$$\begin{cases} y" + a_1(t)y' + a_2(t)y = b(t) \\ y(t_0) = v_1^0 \quad et \quad y'(t_0) = v_2^0 \end{cases}$$

*appelé **problème de Cauchy** associé à l'équation $(\mathcal{L})$ en t_0 pour la valeur initiale (v_1^0, v_2^0).*

Nous déduisons du théorème de Cauchy-Lipschitz relatif aux systèmes différentiels un théorème théorique d'existence et d'unicité sans qu'il soit possible de donner une méthode générale de calcul des solutions.

Théorème 1.9. *théorème de Cauchy-Lipschitz*

Si les applications a_1, a_2 et b sont continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y" + a_1(t)y' + a_2(t)y = b(t) \\ y(t_0) = v_1^0 \quad et \quad y'(t_0) = v_2^0 \end{cases}$$

admet une solution et une seule de classe $\mathcal{C}^2$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Théorème 1.10. $\mathbb{C}$ *espace vectoriel des solutions*

L'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{K}$ de l'équation homogène

$$y" + a_1(t)y' + a_2(t)y = 0$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension 2.

Remarque 1.1.3.

Dans le cas d'une équation linéaire d'ordre 2 homogène si connaît une solution φ, on pourra déterminer l'espace vectoriel des solutions par la méthode d'abaissement du degré en effectuant le changement de fonction inconnue $y = \varphi z$, on constera que z' est solution d'une équation linéaire du premier ordre. Voir TD.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Théorème 1.11. *: structure affine de l'ensemble des solutions*

Soit φ_0 est une solution particulière de l'équation complète $(\mathcal{L})$, l'ensemble des solutions de cette équation est $\varphi + \varphi_0$ où φ est solution de l'équation homogène associée.

Théorème 1.12. *: Principe de superposition*

Si on note $(\mathcal{L}_1)$ et$(\mathcal{L}_2)$ et $(\mathcal{L})$ respectivement les équations :

$$\begin{aligned} y^{(2)} + a_1(t)y' + a_2(t)y &= b_1(t) \\ y^{(2)} + a_1(t)y' + a_2(t)y &= b_2(t) \\ y^{(2)} + a_1(t)y' + a_2(t)y &= b_1(t) + b_2(t) \end{aligned}$$

et si φ_1 et φ_2 sont solutions de $(\mathcal{L}_1)$ et $(\mathcal{L}_2)$ alors $\varphi_1 + \varphi_2$ est solution de $(\mathcal{L})$

1.1.4.3 Résolution dans le cas de coefficients constants

Definition 1.7.

On appelle ***polynôme caractéristique*** *associé à l'équation $y" + a_1y' + a_2y = 0$, le polynôme P défini par $P(r) = r^2 + a_1r + a_2$.*

1.1.4.3.1 Résolution d'une équation homogène à coefficients constants

Théorème 1.13. $\mathbb{C}$ *espace vectoriel des solutions*

L'ensemble des solutions de $y" + a_1y' + a_2y = 0$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 2 engendré par,

1. *si P admet deux racines distinctes λ_1 et λ_2 :*

$$t \mapsto \exp(\lambda_1 t) \quad et \quad t \mapsto \exp(\lambda_2 t)$$

2. *si P admet une racine double λ :*

$$t \mapsto \exp(\lambda t) \quad et \quad t \mapsto t\exp(\lambda t)$$

.

démonstration. démonstration en cours. □

Théorème 1.14. $\mathbb{R}$ *espace vectoriel des solutions*

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Si les coefficients a_1 et a_2 sont réels, l'ensemble des solutions réelles de $(\mathcal{L}_H)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 engendré par,

1. *si P admet deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2 :*

$$t \mapsto \exp(\lambda_1 t) \quad et \quad t \mapsto \exp(\lambda_2 t).$$

2. *si P admet deux racines complexes conjugées $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ et $\overline{\lambda_1}$:*

$$t \mapsto \exp(\alpha_1 t)\cos(\beta_1 t) \quad et \quad t \mapsto \exp(\alpha_1 t)\sin(\beta_1 t).$$

3. *si P admet une racine double λ :*

$$t \mapsto \exp(\lambda t) \quad et \quad t \mapsto t\exp(\lambda t).$$

1.1.4.3.2 Résolution pratique d'une équation à coefficients constants avec un second membre de la forme $P(t)e^{rt}$

Théorème 1.15. *Equation complète, méthode des coefficients indéterminés, lorsque b(t) est de la forme $P(t)e^{rt}$*

Si $b(t) = P(t)e^{rt}$ où $r \in \mathbb{C}$ et où P est un polynôme de degré k on pourra chercher une solution particulière de la forme.

$(t \mapsto Q(t)e^{rt})$ si r n'est pas solution de l'équation caractéristique.

$(t \mapsto tQ(t)e^{rt})$ si r est racine simple de l'équation caractéristique.

$(t \mapsto t^2Q(t)e^{rt})$ si r est racine double de l'équation caractéristique.

où Q est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré k.

[1]

Exemple 1.1.7. Déterminer une solution de l'équation différentielle

$$y" = -2y' - 10y + e^{-t}\cos^3 t$$

en écrivant $e^{-t}\cos^3 t$ comme la somme d'expressions de la forme $P(t)e^{r_i t}$ et en appliquant le principe de superposition.
réponse :

$$\frac{e^{-t}\sin 3t}{24} + \frac{3e^{-t}\cos t}{32}.$$

[1] Si r est réel et si les coefficients de $(\mathcal{L})$ sont réels, Q est un polynôme de $\mathbb{R}$[X]. Si r est complexe et si les coefficients de $(\mathcal{L})$ sont réels, Q est un polynôme de $\mathbb{R}$[X]

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

1.1.4.4 Complément variation des constantes

Etant données deux solutions y_1, y_2 de $(\mathcal{L}_H)$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, on note

$$\forall t \in I \quad w(y_1, y_2)(t) \ = \ det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}$$

Proposition 4.
$w(y_1, y_2)$ s'annule en tout point de I, si et seulement si il s'annule en au moins un point de I.
(y_1, y_2) est une base de l'espace vectoriel des solutions $(\mathcal{L}_H)$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ si et seulement $w(y_1, y_2)$ est non nul en au moins un point de I.

L'application w définie sur $\mathbb{R}$ est appelé le **wronskien** de (y_1, y_2)

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

1.2 EXERCICES

1.2.1 Révisions - réduction des matrices diagonalisables

Exercice 1.1. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

M est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$, sur $\mathcal{C}$?
Voilà ce que vous pouvez-vous obtenir comme réduction avec Maple :

```
> with(linalg): M :=
> matrix(3,3,[0,1,0,0,0,1,1,-1,1]);
```

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> J := jordan(M, 'P');
```

$$J := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

```
> print(P);
```

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4+1/4\,i & 1/4-1/4\,i \\ 1/2 & -1/4+1/4\,i & -1/4-1/4\,i \\ 1/2 & -1/4-1/4\,i & -1/4+1/4\,i \end{bmatrix}$$

Pensez-vous que la matrice de passage P, dont vous donnerez la définition, soit définie de manière unique ?

Eléments de réponse
Maple vous permet de vérifier vos résultats. Non diagonalisable sur $\mathbb{R}$, elle l'est sur $\mathcal{C}$.

Exercice 1.2. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Déterminer une base de vecteurs propres de cette matrice et l'écrire sous la forme PDP^{-1} ?

Eléments de réponse

Utilisez la procédure précédente, que vous permet de vérifier Maple sur cet exemple ? D est définie de manière unique à une permutation des colonnes près et P ?

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.3. 1. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

.

(a) Vérifier que M admet une unique valeur propre $\lambda_1 = 1$.

(b) Pourquoi peut-on dire immédiatement que la matrice M n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, ni sur $\mathcal{C}$.

(c) Montrer que le sous-espace propre associé, E_1, est de dimension 2. Soit (e_1, e_2) une base de E_1.

(a) Quelle est la forme de la matrice T de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à cette matrice dans une base de $\mathbb{R}^3$ de la forme (e_1, e_2, e_3).

(b) Ecrire M sous la forme $P^{-1}TP$.

(a) Montrer que la matrice $(I - M)^2$ est nulle.

(b) Ce résultat contient-il celui donné par le théorème de Cayley-Hamilton, théorème qui énonce que la matrice $(I - M)^3$ est nulle, ou bien en est-il une conséquence ?.

Eléments de réponse

E_1 est le plan vectoriel d'équation $x - 3y - z = 0$. On peut choisir $e_1 = (1, 0, 1)$ et $e_2 = (0, 1, -3)$. On peut choisir $e_3 = (0, 0, 1)$.La dernière colonne de la matrice T est alors ${}^t f(e_3)$ où $f(e_3) = (-1, -1, 1)$.

Exercice 1.4. 1. Montrer que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

admet une valeur propre réelle $\lambda_1 = 1$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

2. Vérifier que le sous-espace propre associé $E_1 = \text{vect}e'_1$ où $e'_1 = (-1, 0, 1)$.
3. La matrice M est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?.
4. vérifier que $\mathbb{R}^3 = E_1 \bigoplus F_1$ où $F_1 = \text{vect}(e_2, e_3)$
5. Soit f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à cette matrice et p la projection sur F_1 parallélement de direction E_1 et f_1 l'endomorphisme du plan vectoriel F_1 qui à un vecteur u u associe $f_1(u) = p(f(u))$. Ecrire la matrice de f dans la base (e'_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ puis celle de l'endomorphisme f_1 dans la base (e_2, e_3) du plan vectoriel F_1 .
6. Vérifier que 1 est valeur propre de f_1 et montrer que le sous-espace propre associé est. $\text{vect}e_3$
7. Vérifier que la matrice T de f dans la base (e'_1, e_3, e_2) est triangulaire.

1.2.2 Equation différentielle linéaire scalaire d'ordre1

1.2.2.1 apprentissage du cours

Exercice 1.5.
1. Résoudre le problème de Cauchy [1] $t \in \mathbb{R}$ $y'(t) = y(t) + t \quad et \quad y(1) = -1$

1. en appliquant la formule de représentation.
2. avec la méthode du facteur intégrant.
3. par la méthode de variation de la constante.
4. en appliquant la régle relative aux équations linéaires à coefficient constant dont le second membre est de la forme $P(t)e^{rt}$.

2. Inéquation : trouver une fonction f qui majore y sur $[1, +\infty[$ sachant que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \;\; y'(t) \leq y(t) + t \quad et \quad y(1) = -1$$

AVEC MAPLE ce problème de Cauchy peut s'écrire :

```
> dsolve(D(y)(t)=y(t)+t,y(1)=-1,y(t)) ;
ou
> Eq := (diff(y(x),x)+y(x)=x) ;
> dsolve(Eq,y(1)=-1,y(x)) ;
```

question supplémentaire : Observez le graphique suivant qui représente quelques solutions de l'équations différentielle étudiée. Quelles remarques faites-vous ? (asymptote..)

[1] toutes les méthodes du cours peuvent lui être appliquées

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

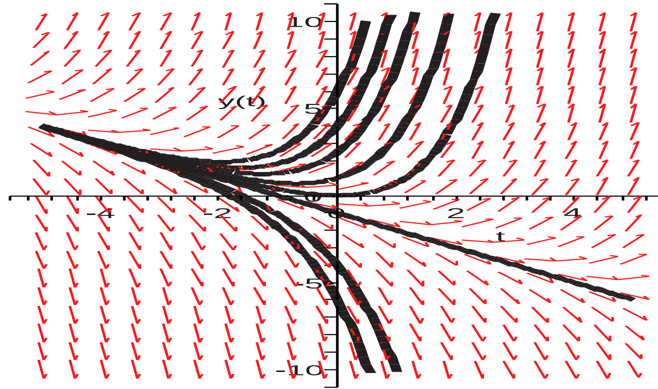


FIG. 1.1 – courbes représentatives de l'équation y'=y+t

Exercice 1.6.
La hauteur, $h(t)$, de l'eau contenue à l'instant t dans un seau percé de hauteur 1 vérifie l'équation différentielle $h' = -K\sqrt{h}$ où K est un réel positif donné.

1. Trouver, en vous inspirant de la solution au problème physique que cette équation modélise, une solution de cette équation définie sur $I = \mathbb{R}^+$ et qui vérifie $h(0) = 1$.
2. Montrer qu'il existe une infinité de solutions vérifiant $h(1) = 0$.

Eléments de réponse
Cette solution vérifie $2\sqrt{h(t)} = 2-Kt$, pour $t < \dfrac{2}{K}$ elle s'annule pour $t = \dfrac{2}{K}$. Vérifier que on peut la prolonger par 0 pour $t > \dfrac{2}{K}$. Dessiner les solutions et voir qu'il y a une infinité de solutions si la valeur initiale est nulle

Exercice 1.7. *intensité du courant dans un circuit en série*
L'intensité du courant d'un circuit en série est une fonctions I du temps qui vérifie l'équation différentielle $\mathcal{E}$:

$$RI' + \frac{1}{C}I = V sin\omega t$$

où R, C, ω sont des constantes positives.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ admet une seule solution φ_0 périodique
2. Justifier le terme "régime stationnaire" attribué à cette solution.

Eléments de réponse
Les solutions de $\mathcal{E}$ s'écrivent comme somme d'une fonction périodique et

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

d'une solution de l'équation homogène associée qui est non périodique et qui diminue rapidement au bout de quelques périodes.

1.2.2.2 pour aller plus loin

Exercice 1.8. :

1. Montrer qu'une primitive sur $[2,+\infty[$ de $(x^2-4)^{-\frac{3}{2}}$ est $-\dfrac{x}{4\sqrt{x^2-4}}$
2. Déterminer la solution sur $]2,+\infty[$ du problème de Cauchy $y' = +\dfrac{x}{x^2-4}\cdot$ $y + \dfrac{2}{x^2-4}$ et $y(2\sqrt{2})$ =0 en 2 ?
3. Déterminer la solution sur $]-2,2[$ du problème de Cauchy $y(0)=0$ et $y' = +\dfrac{x}{x^2-4}\cdot y + \dfrac{2}{x^2-4}$
4. prolongement : Etudier le problème de Cauchy défini sur sur $\mathbb{R}$ avec la condition initiale en 0, $y(0) = y_0$ relatif à l'équation différentielle
$$(x^2-4)\cdot y' \quad = x\cdot y \quad + \quad 2$$

Exercice 1.9.
Résoudre chacun des problèmes de Cauchy :

1. $$x\in\mathbb{R} \qquad y' - 2xy = shx - 2xchx \quad y(0)=0$$
2. $$x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\qquad y' + y\tan x = \sin 2x \quad y(0)=y_0$$
3. $$x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\qquad y' + y\tan x = \frac{1}{\cos x} \quad y(0)=y_0$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

4.
$$x \in \mathbb{R} \qquad xy' + y = \arctan 2x \quad y(1) = \pi/4$$

5. Désintégration radio-active généralisée.
$$x \in \mathbb{R} \qquad y' = -2|y| \qquad y(1) = y_0$$

6.
$$x \in \mathbb{R} \qquad y' = -2|y| \qquad y(0) = y_0$$

où y_0 est un paramètre réel donné.

Exercice 1.10. coefficients constants
Résoudre chacun des problèmes de Cauchy :

1.
$$x \in \mathbb{R} \qquad y' = y + 2tch(t) \quad y(0) = 0$$

2.
$$x \in \mathbb{R} \qquad y' = y + t\cos t \quad y(0) = 0$$

Eléments de réponse
Ces méthodes de calcul de solutions d'une équation différentielle à coefficients constants par **la méthode des coefficients indéterminés** étaient très utiles, il y a quelques années, avant la prolifération des logiciels de calcul formel... Pour le moment vous devez encore connaître ces méthodes et vous devez en particulier vérifier que la forme des solutions que vous proposez satisfait ces règles. Ici on détermine successivement les solutions de :
$$x \in \mathbb{R} \quad y' = y + te^t \qquad \text{et} \qquad x \in \mathbb{R} \quad y' = y + te^{-t}$$
L'équation homogène $y' = ay$ avec $a = 1$ a comme ensemble solution $Ce^t \quad C \in \mathbb{R}$.
Dans chacun des deux cas le second membre est de la forme $P(t)e^{rt}$.
Pour la première équation $r = a = 1$. On cherche donc une solution de la forme $\varphi(t) = tQ(t)e^t = t(\alpha t + \beta)e^t = (\alpha t^2 + \beta t)e^t$. Alors $\varphi'(t) = (\alpha t^2 + (2\alpha + \beta)t + \beta)e^t$. Il vient :
$$(\alpha t^2 + (2\alpha + \beta)t + \beta)e^t = (\alpha t^2 + \beta t)e^t + te^t$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \beta = 0$$

Pour la seconde équation $r \neq a$. On cherche donc une solution de la forme $\varphi(t) = P(t)e^{-t} = (\alpha t + \beta)e^{-t}$. Alors $\varphi'(t) = (-\alpha t + (\alpha - \beta))e^{-t}$. Il vient :

$$(-\alpha t + (\alpha - \beta))e^{-t} = (\alpha t + \beta)e^{-t} + te^{-t}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad \beta = -\frac{1}{4}$$

Une solution particulière de l'équation proposée est donc :

$$\frac{1}{2}t^2 \exp t - \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-t}$$

L'ensemble solution de l'équation proposée est donc :

$$\{\frac{1}{2}t^2 \exp t - \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-t} + Ce^t\}$$

La solution qui vaut 0 en 0 est :

$$\frac{1}{2}t^2e^t - \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^t$$

Pour la seconde équation, on remarque qu'il suffit de trouver une solution particulière de l'équation :

$$x \in \mathbb{R} \qquad y' = y + te^{it}$$

Alors, sa partie réelle est solution de :

$$x \in \mathbb{R} \qquad y' = y + t\cos t$$

$r \neq a$. On cherche donc une solution de la forme $\varphi(t) = Q(t)e^{it} = (\alpha t + \beta)e^{it}$. Alors $\varphi'(t) = (i\alpha t + (\alpha + i\beta))e^{it}$. Il vient :

$$(i\alpha t + (\alpha + i\beta))e^{it} = (\alpha t + \beta)e^{it} + te^{it}$$

$$(i-1)\alpha = 1 \quad (i-1)\beta = -\alpha \Rightarrow \alpha = -\frac{1+i}{2} \quad \beta = -\frac{i}{2}$$

Une solution particulière de l'équation donnée est :

$$\Re e(-\frac{1+i}{2}t(\cos t + i\sin t) + \frac{i}{2}(\cos t + i\sin t)) = \frac{1}{2}(-t\cos t + t\sin t + \sin t)$$

Cette solution vaut 0 en 0. C'est la solution cherchée.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

1.2.3 Systèmes différentiels

1.2.3.1 apprentissage du cours

Exercice 1.11. Appliquer le théorème (1.3)[1]
Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 + \quad y_2 - 1 \end{cases}$$

La réponse donnée par Maple :

```
> restart: with(DEtools):
> SH:=D(y1)(t)=y1(t)-y2(t),D(y2)(t)=y1(t)+y2(t)
> ;
```

$$SH := \mathrm{D}(y1)(t) = y1(t) - y2(t),\ \mathrm{D}(y2)(t) = y1(t) + y2(t)$$

```
> dsolve({SH},{y1(t),y2(t)});
```

$$\left\{y2(t) = e^t(_C1\ \sin(t) + _C2\ \cos(t)),\ y1(t) = e^t(_C1\ \cos(t) - _C2\ \sin(t))\right\}$$

```
> S:=D(y1)(t)=y1(t)-y2(t),D(y2)(t)=y1(t)+y2(t)-1;
```

$$S := \mathrm{D}(y1)(t) = y1(t) - y2(t),\ \mathrm{D}(y2)(t) = y1(t) + y2(t) - 1$$

```
> dsolve({S},{y1(t),y2(t)});
```

$$\left\{y2(t) = 1/2 + e^t(_C2\ \sin(t) + _C1\ \cos(t)),\ y1(t) = 1/2 - e^t(-_C2\ \cos(t) + _C1\ \sin(t))\right\}$$

```
> ics := y1(0)=2, y2(0)=2;
```

$$ics := y1(0) = 2,\ y2(0) = 2$$

Solve the system subject to the initial condition.

```
> dsolve([S, ics]);
```

$$\left\{y1(t) = 1/2 - e^t(-3/2\ \cos(t) + 3/2\ \sin(t)),\ y2(t) = 1/2 + e^t(3/2\ \sin(t) + 3/2\ \cos(t))\right\}$$

Exercice 1.12. Appliquer le théorème (1.4) :

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}^2$ puis dans $\mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy pour le système différentiel écrit matriciellement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

avec la condition initiale

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire ce système.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice M de ce système dans $\mathbb{C}$.

[1] ou méthode de variation des constantes

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

3. Déterminer la solution de ce système en effectuant les calculs dans $\mathbb{C}$ et en vérifiant que la solution obtenue est réelle en utilisant l'exemple donné en cours pour illustrer le théorème d'existence et de calcul de Cauchy Lipschitz (Cauchyvectorielconstanthomogène).
4. Donner une base de l'espace vectoriel des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}^2$ de ce système homogène, puis une base de l'espace vectoriel des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
5. Voici une autre manière d'écrire les calculs précédents. Ecrire la matrice de passage P qui permet de diagonaliser M "dans la base de vecteurs propres obtenue" en écrivant $M = PDP^{-1}$ et retrouver le résultat précédent en effectuant le changement de fonction inconnue z avec $Y = PZ$ et en vérifiant que z est solution du système différentiel précédemment évrit et dont les équations sont découplées(la matrice du système est diagonale).

Exercice 1.13.

Déterminez une solution du système différentiel :

$$Y' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

de la forme de la forme

$$\begin{pmatrix} a\cos t + b\sin t \\ c\cos t + d\sin t \end{pmatrix}$$

Résoudre sur $\mathbb{R}$, le problème de Cauchy obtenu pour ce système et la condition initiale :

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exercice 1.14.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice A est diagonalisable .
2. Résoudre le système différentiel Y'=AY .
3. Résoudre le système différentiel Y'=AY + B(t) où

$$B(t) = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.2.3.2 pour aller plus loin

Exercice 1.15. matrice non diagonalisable

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable
2.Déterminer un vecteur w_2 de $\mathbb{R}^3$ qui appartient à $\mathrm{Ker}(A - I)$ puis un vecteur w_3 de $\mathbb{R}^3$ qui appartient à $\mathrm{Ker}(A - I)^2$ sans appartenir à $\mathrm{Ker}(A - I)$
3. Vérifier que dans une base $\mathcal{B}$ formée de deux vecteurs propres w_1 et w_2 de A et de w_3, l'endomorphisme représenté par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est représenté par une matrice triangulaire
4. Résoudre le système différentiel Y'=AY en utilisant un changement d'application inconnue Y=PZ où P est convenablement choisie.

1.2.3.2.1 système non homogène à coefficients non constants

Exercice 1.16. **

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

1. Diagonaliser la matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t}{1+t^2} & \dfrac{1}{1+t^2} \\ -\dfrac{1}{1+t^2} & \dfrac{t}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

2. Résoudre le système différentiel Y'=A(t)Y
3. Résoudre le système différentiel Y'=A(t)Y+B(t) où

$$B(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{2t^2-1}{1+t^2} \\ \dfrac{3t}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

Eléments de réponse
Ce n'est pas un système à coefficients constants, mais la matrice de ce système est diagonalisable avec une matrice de passage P, indépendante de t

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

Matrice qui permet de réduire $A = PDP^{-1}$ à la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \dfrac{t+i}{1+t^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{t-i}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

1.2.3.2.2 systèmes d'ordre supérieur à 1

Exercice 1.17.

On considère le système différentiel du second ordre

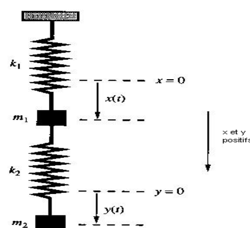
$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x" & + & 3y' & - & 4x & + & 6y & = & 0 \\ x' & + & y" & - & 2x & + & 4y & = & 0 \end{array} \right)$$

1. Montrer que ce système différentiel du second ordre peut être remplacé par un système différentiel du premier ordre.
2. Montrer que l'ensemble solution de ce système forme un sous-espace vectoriel de dimension 4
3. Donner une base de ce sous-espace vectoriel.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exercice 1.18.
On considère un système masses-ressorts représenté sur le schéma ci-après. Deux masses $m_1 = 2$kg et $m_2 = 1$kg, sont reliées par un ressort de raideur $k_2 = 2\text{Nm}^{-1}$ et sont attachées à un support fixe par un ressort de raideur $k_1 = 4\text{Nm}^{-1}$. On note à chaque instant t les déplacements $x(t)$ et $y(t)$ des deux masses à partir de la position d'équilibre , après avoir, à l'instant t=0, déplacé

ces masses vers le bas de 1 mètre.



On admettra que la loi de Newton permet d'établir que les applications x et y vérifient :

$$2x" = -4x + 2(y - x)$$
$$y" = \quad -2(y - x)$$

1. Montrer que l'application vectorielle $X(t \mapsto (x(t), x'(t), y(t), y'(t))$ est solution d'un système différentiel (S) d'ordre 1 que l'on écrira.
2. Vérifier que i et 2i sont valeurs propres de la matrice du système différentiel (S) précédemment défini. Déterminer des vecteurs propres associés. En déduire l'espace vectoriel des solutions à valeurs dans $\mathcal{C}$ de (S).
3. Sachant que les conditions initiales permettent d'écrire :

$$x(0) = 1 \quad x'(0) = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$$

   déterminer l'expression de x et de y en fonction du temps t.

Exercice 1.19. d'après un sujet de partiel
On se propose d'étudier l'équation différentielle linéaire d'ordre 4 à coefficients constants, notée $(\mathcal{L})$ où l'inconnue y désigne une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, quatre fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée quatrième $y^{(4)}$:

$$y^{(4)} + 4y = 0 \qquad (\mathcal{L})$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

en revenant à un système différentiel d'ordre 1.
Montrer qu'une application y définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{C}$ est solution de cette équation différentielle avec la condition initiale

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f"(0) = 0, f^{(3)}(0) = 0 \quad (\mathcal{I})$$

si et seulement si l'application vectorielle Y définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{C}^4$ par $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y" \\ y^{(3)} \end{pmatrix}$ est solution d'un système différentiel d'ordre 1 $(\mathcal{E})$:

$$Y' = AY \qquad (\mathcal{E})$$

où A est une matrice carrée d'ordre 4 que l'on explicitera et avec une condition initiale que l'on explicitera. On note $Y = \Psi(y)$ l'application linéaire de $\mathcal{C}^4(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})^4$ définie par $y \mapsto (y, y', y", y^{(3)})$.

1. Quel est la dimension de l'espace vectoriel $(\mathcal{S}_{\mathcal{E}})$ des solutions de $(\mathcal{E})$ à valeurs dans $\mathbb{C}^4$. ?
2. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A. Montrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{C}$, choisir une base de vecteurs propres de A,(V_1, V_2, V_3, V_4), et exprimer à l'aide de (V_1, V_2, V_3, V_4) une base de $(\mathcal{S}_{\mathcal{E}})$
3. Définir un isomorphisme de l'espace vectoriel $(\mathcal{S}_{\mathcal{L}}, +, .)$ sur l'espace vectoriel $(\mathcal{S}_{\mathcal{E}}), +, .)$
4. Donner la dimension de l'espace vectoriel $(\mathcal{S}_{\mathcal{L}})$ et une base de $(\mathcal{S}_{\mathcal{L}})$
5. Montrer que l'équation $(\mathcal{L})$ admet une solution et une seule vérifiant la condition initiale $(\mathcal{I})$.
6. Donner une base $\mathcal{B}$ de l'espace vectoriel des solutions de $(\mathcal{L})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1.20. d'après un sujet de partiel
Soient a,b deux réels non nuls donnés et le système différentiel

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \varepsilon b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et où la variable t désigne le temps et décrit $\mathbb{R}$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

1. On suppose $\varepsilon = 1$. Déterminer la solution du système différentiel (1.17), notée y_α[1] , qui vérifie la condition initiale

$$y_{\alpha\,1}(0) = \alpha_1 \quad \text{et} \quad y_{\alpha\,2}(0) = \alpha_2 \tag{1.18}$$

2. Pourquoi une solution du système (1.17) qui s'annule à un instant t_0 est-elle nulle [2] ?
   On suppose $\epsilon = 1$, $0 < -b < a$, pour quelles valeurs de la condition initiale $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ la solution y_α vérifie-t-elle $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} y_{\alpha\,1}(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} y_{\alpha\,2}(t) = 0$? Représenter, dans le plan rapporté à un repère $(O(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}))$, les points de coordonnées (α_1, α_2) correspondants.
3. On suppose $\varepsilon = -1$, déterminer la solution y_α [3] du système différentiel (1.17) qui vérifie la condition initiale (1.18).
4. Soit h une constante et y une solution du système (1.17). Montrer que l'application z $(t \mapsto z(t) = y(t-h))$ est aussi solution du système (1.17). En déduire, en prenant $h = t_0 - t_1$, que si y vérifie $y(t_0) = y(t_1)$ avec $t_0 < t_1$ alors y est périodique de période $(t_1 - t_0)$. Pour quelles valeurs des paramètres ε, a et b le système (1.17) admet-il une solution périodique ?

Exercice 1.21. sujet Dans toute la suite, a désigne un réel non nul ; vous noterez t la variable.

1. On veut déterminer la solution $z = (z_1, z_2, z_3)$ du problème de Cauchy défini par le système différentiel linéaire homogène à coefficients constants

$$\left\{ \begin{array}{llll} z_1' = & -a\,z_1 & +z_2 & \\ z_2' = & & & z_3 \\ z_3' = & & -a^2 z_2 & \end{array} \right. \tag{1.19}$$

   pour la condition initiale

$$\left\{ \begin{array}{ll} z_1(0) = & 0 \\ z_2(0) = & 3 \\ z_3(0) = & 0 \end{array} \right. \tag{1.20}$$

   (a) Ecrire la matrice associée à ce système

[1] $y_\alpha = (y_{\alpha 1}, y_{\alpha 2})$
[2] $\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = (0, 0))$
[3] $y_\alpha = (y_{\alpha 1}, y_{\alpha 2})$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

(b) Vérifier qu'elle est diagonalisable et déterminer une base de vecteurs propres

(c) Donner une base de l'espace vectoriel des solutions du système (1.19) en énonçant avec soin le théorème du cours utilisé.

(d) Déterminer la solution du problème de Cauchy obtenu pour la condition initiale (1.20).

2. On se propose d'aborder différemment le système différentiel (1.19). [1].

(a) Montrer, en énonçant les théorèmes du cours utilisés, que le système différentiel (4.5)

$$\left\{ \begin{array}{lll} x' = & -a\,x & +y \\ y" = & -a^2\,y & \end{array} \right. \tag{1.21}$$

admet une solution et une seule u=(x,y) qui vérifie la condition initiale :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x(0) = & 0 \\ y(0) = & 3 \\ y'(0) = & 0 \end{array} \right. \tag{1.22}$$

(b) Calculer la solution du système différentiel (4.5) qui vérifie la condition initiale (1.22) .

(c) Montrer que si $u = (x, y)$ est solution du système différentiel (4.5) alors $\varphi = (x, y, y')$ est solution d'un système différentiel du premier ordre.

(d) Vérifier la cohérence des résultats obtenus dans la première et dans la seconde question.

[1]y" représente la dérivée seconde de y

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

1.2.4 Equations scalaires d'ordre 2

1.2.4.1 exercices d'apprentissage du cours

Exercice 1.22. équations à coefficients constants, second membre $P(t)e^{rt}$
Soit n un entier positif ou nul. On considère l'équation différentielle

$$y"_n(t) \quad + \quad y_n(t) \quad = \quad cos(nt) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.23}$$

1. Donner l'ensemble des solutions réelles de cette équation en fonction des valeurs de l'entier n.
2. En déduire pour p entier non nul donné l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle

$$y"(t) \quad + \quad y(t) \quad = \quad \sum_{n=1}^{n=p} a_n cos(nt) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.24}$$

   où les a_n est une constante réelle.

Exercice 1.23. abaissement du degré

1. Vérifier que $\varphi_1 : (t \mapsto \sin t)$ est solution sur $I =]0, \frac{\pi}{2}[$ de l'équation différentielle
$$y" - \tan t \cdot y' + 2y = 0$$
2. Résoudre sur $I =]0, \frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle en effectuant le changement de fonction inconnue $y(t) = \sin(t)z(t)$.
$$y" - \tan t \cdot y' + 2y = 0$$
3. méthode utilisant le wronskien
   (a) Vérifier si φ_2 est solution de cette équation le wronskien $w = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1'$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre
   (b) Vérifier $w(t) = \dfrac{k}{\cos t}$
   (c) En remarquant que $w(t) = (\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1})'(t)$, retrouver l'ensemble solution de l'équation différentielle $y" - \tan t \cdot y' + 2y = 0$.

indications pour (3) :Le wronskien $w(y_1, y_2)$ est solution de l' équation différentielle du premier ordre $w' = -a_1 w$ donc $w = w(t_0)exp - \int_{t_0}^{t} a_1(s)ds$
Remarquant que $(\dfrac{y_2}{y_1})' = \dfrac{w(y_1, y_2)}{y_1^2}$, on calcule $(\dfrac{y_2}{y_1})'$ puis $(\dfrac{y_2}{y_1})$ et enfin y_2.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exercice 1.24.
Résoudre le problème de Cauchy sur l'intervalle I$=]0, +\infty[$

$$y" + 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^2}, \quad y(1) = 0 \quad y'(1) = 0$$

en faisant le changement de fonction inconnue $y = e^{2x}z$

Exercice 1.25.
Résoudre le problème de Cauchy sur l'intervalle I$=]0, +\infty[$

$$x^2y" - xy' - 3y = x^3, \quad y(1) = 0 \quad y'(1) = 0$$

en faisant le changement de variable $x = e^t$, ce qui revient à déterminer l'application z définie par $z(t) = y(e^t)$

Exercice 1.26.
Une équation de Bernouilli est de la forme $y' = a(x)y^\alpha + b(x)y$, elle est non linéaire lorsque le réel α est différent de 1, on la résoud en effectuant le changement de fonction inconnue $z = y^{1-\alpha}$. Appliquer cette méthode pour résoudre l'équation

$$x^2y' + y + y^2 = 0, \quad y(1) = 1$$

en précisant sur quel ensemble la solution donnée peut être définie.

1.2.4.2 pour aller plus loin

Exercice 1.27.
Résoudre[1] par la méthode du théorème (1.3) le problème de Cauchy sur l'intervalle I$=]\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$

$$y" + y = \frac{1}{\cos 2t}, \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$$

Solution : C'est une équation à coefficients constants mais le second membre $b(t)$ continue sur I, ne peut être exprimé sous forme du produit d'un polynôme et d'une exponentielle. On revient donc à un système d'ordre 1 à coefficients constants en introduisant $y_1 = y$ et $y_2 = y'$, même si nous cherchons seulement y_1. Ce système s'écrit :

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 + \dfrac{1}{\cos 2t} \end{cases} \tag{1.25}$$

[1] Cet exercice est résolu en cours par la méthode de variation des deux constantes. vous constaterez que les calculs sont identiques

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Selon le théorème (1.3), il suffit de chercher les vecteurs propres de l'endomorphisme a défini dans la base canonique par sa matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce sont les vecteurs $v_1 = (1, i)$ et $v_2 = (1, -i)$. Nous cherchons (y_1, y_2) dans la base (v_1, v_2) en écrivant :

$$\left\{\begin{array}{lllll} (y_1, y_2) & = z_1 & v_1 & +z_2 & v_2 \\ (y_1', y_2') & = z_1' & v_1 & +z_2' & v_2 \\ a(y_1, y_2) & = z_1 i & v_1 & +z_2(-i) & v_2 \\ (0, \dfrac{1}{\cos 2t}) & = -\dfrac{i}{2\cos 2t} & v_1 & +\dfrac{i}{2\cos 2t} & v_2 \\ (1, 1) & = \dfrac{1-i}{2} & v_1 & +\dfrac{1+i}{2} & v_2 \end{array}\right.$$

Nou calculons z_1 et z_2, nous en déduirons $y = z_1 + z_2$. L'égalité (1.25) s'écrit :

$$\begin{cases} z_1' = iz_1 - \dfrac{i}{2\cos 2t} \\ z_2' = -iz_2 + \dfrac{i}{2\cos 2t} \\ z_1(0) = \dfrac{1-i}{2} \quad z_2(0) = \dfrac{1+i}{2} \end{cases} \tag{1.26}$$

Les équations qui forment le système (1.26) ont des solutions qui sont conjuguées. D'où $y = z_1 + z_2 = 2\mathcal{R}e(z_1)$. Selon la formule de représentation (1.1)donnée au début de ce cours (ou par la méthode de variation de la constante) on sait :

$$z_1(t) = \frac{1-i}{2}e^{it} + e^{it}\int_0^t -\frac{ie^{-is}}{2\cos 2s}ds$$

Il reste à calculer :

$$\int_0^t -\frac{ie^{-is}}{2\cos 2s}ds = \int_0^t \frac{\sin s - i\cos s}{2\cos 2s}ds$$

$$\int_0^t \frac{\sin s - i\cos s}{2\cos 2s}ds = \int_0^t \frac{\sin s}{2\cos 2s} + i\int_0^t -\frac{\cos s}{2\cos 2s}ds$$

Avec le changement de variable $u = \cos s$ puis $v = \sqrt{2}u$:

$$\int_0^t \frac{\sin s}{2\cos 2s}ds = \int_0^{\cos t} \frac{1}{2u^2 - 1}du = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}\cos t} \frac{1}{1 - v^2}dv = -\operatorname{arg\,tanh}(\sqrt{2}\cos t)$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Avec le changement de variable $u = \sin s$ puis $v = \sqrt{2}u$:

$$\int_0^t -\frac{\cos s}{2\cos 2s} ds = \int_0^{\sin t} \frac{1}{1-2u^2} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}\sin t} \frac{1}{1-v^2} dv = \arg\tanh(\sqrt{2}\sin t)$$

D'où :

$$\mathcal{R}e\big(e^{it} \int_0^t -\frac{ie^{-is}}{2\cos 2s} ds = -\cos t \arg\tanh(\sqrt{2}\cos t) - \sin t \arg\tanh(\sqrt{2}\sin t)$$

$$y(t) = 2\mathcal{R}e(z_1) = \cos t + \sin t + \arg\tanh(\sqrt{2}\sin t) + \arg\tanh(\sqrt{2}\sin t)$$

où $\arg\tanh x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

1.2.5 Problème de physique : un montage électrique

sujet rédigé avec Daniel Babot

Dans le montage présenté ci-dessous R, C, L, M sont des constantes :

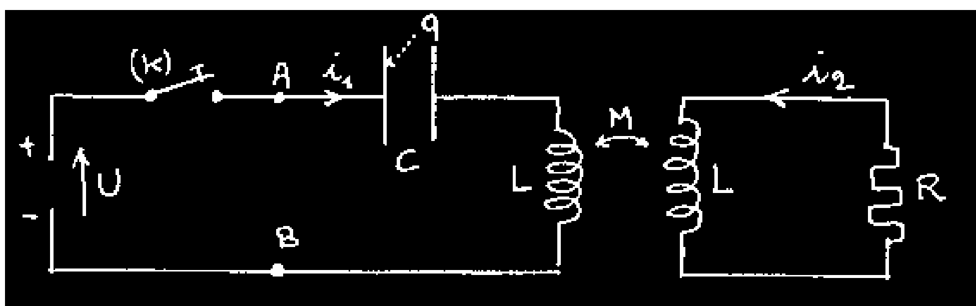


Fig. 1.2 – représentation du circuit

- la constante R égale à 100 est la mesure en ohm de la résistance
- la constante C égale à 12×10^{-6} est la mesure en farad de la capacité du condensateur
- la constante L égale à 0,37 est la mesure en henry des selfs des deux bobines identiques
- la constante M égale à 0,35 est la mesure en henry du coefficient d'inductance mutuelle entre ces deux bobines
- la constante U égale à 100 est une mesure en volt

A l'instant t=0 on ferme le contacteur (K), le problème est de chercher s'il est possible de donner l'expression de la charge q du condensateur en fonction du temps sachant que l'application $t \longrightarrow q(t)$ est supposée de classe C^3. D'une part, on établit en appliquant les lois de la physique, que q vérifie l'équation différentielle :

$$(L^2 - M^2)q^{(3)} + RLq^{(2)} + \frac{L}{C}q^{(1)} + \frac{R}{C}q = RU \qquad (\mathcal{L})$$

où $q^{(n)}$ désigne l'application dérivée n^{ieme} de l'application q.

D'autre part les propriétés des éléments de ce circuit permettent d'affirmer que

- la tension aux bornes du condensateur est nulle à l'instant t=0 et donc la charge $q(0)$ est nulle à l'instant t=0.
- l'intensité est nulle à l'instant t=0 et donc la dérivée de la charge $q'(0)$ est nulle à l'instant t=0.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

– De plus on sait que

$$q^{(2)}(0) = \frac{LU}{L^2 - M^2} = 0.25 10^4$$

1. Montrer que la résolution de cette équation différentielle scalaire d'ordre 3 [1] peut se ramener à celle d'un système différentiel d'ordre 1 en introduisant comme nouvelle inconnue une application vectorielle Y convenablement définie en fonction de q.
   Dans toute la suite de cet exercice vous noterez, $(\mathcal{S})$, le système différentiel d'ordre 1 ainsi introduit.
2. Le cours permet-il d'affirmer l'existence ou l'unicité d'une solution de l'équation $(\mathcal{L})$ vérifiant les conditions initiales définies par l'énoncé ?
3. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $(\mathcal{L}_{\mathcal{H}})$ associée à $(\mathcal{L})$

$$(L^2 - M^2)q^{(3)} + RLq^{(2)} + \frac{L}{C}q^{(1)} + \frac{R}{C}q = 0 \qquad (\mathcal{L}_{\mathcal{H}})$$

4. Ecrire la matrice du système différentiel homogène $(\mathcal{S}_{\mathcal{H}})$ associé au système différentiel $(\mathcal{S})$, précédemment écrit. Vérifier que $-\frac{10^4}{12}$ et $-\frac{10^4}{9}$ sont racines de son polynôme caractéristique, puis résoudre le système homogène $(\mathcal{S}_{\mathcal{H}})$.
5. Déterminer l'ensemble solution de l'équation $(\mathcal{L}_{\mathcal{H}})$.
6. Répondre au problème initialement posé, en utilisant les résultats de la question précédente.

[1]type d'équation pour lequel nous n'avons pas donné en cours de mathématiques d'algorithme de résolution ,nous vous proposons ici de généraliser des méthodes vues en cours

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Chapitre 2

SERIES NUMERIQUES

Sommaire

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

2.1 COURS

2.1.1 Introduction

2.1.1.1 Résumé

Dans ce chapitre, on définit, à travers un procédé de passage à la limite, un concept nouveau qui généralise la notion de somme pour un nombre infini de termes.

- Par exemple on sait que :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} &= \frac{1 - \frac{1}{2^4}}{\frac{1}{2}} \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} &= \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

- Intuitivement plus on *somme un grand nombre* de termes $\frac{1}{2^k}$ en les prenant tous à partir de 1, plus la somme obtenue se *rapproche de 2*, ce que l'on a longtemps écrit sous la forme :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^k} + ... = 2$$

On distinguera donc les objets mathématiques suivants :

$$u_k = \frac{1}{2^k} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = 2 - \frac{1}{2^n} \qquad \lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{k=0}^{k=+\infty} u_k = 2$$

On dit que la série de terme général $\frac{1}{2^n}$ converge, et a pour somme 2.
On donne quelques exemples de référence, étudiés à partir de la seule définition, pour lesquels on calcule la somme. Mais la théorie des séries numériques consiste à poser la question de l'existence de cette somme :

1. D'abord pour les séries à termes réels positifs.
2. Puis pour les séries dont les termes sont quelconques.
3. On étudie enfin si les propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition sont ou non conservées.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

2.1.1.2 Positionnement mathématique

	Ce cours a 189 ans, feuilletez le cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique dispensé en 1821 par le savant Cauchy et sachez que ce mathématicien prestigieux a introduit une rigueur toute nouvelle alors en mathématiques en proposant une étude systématique de la convergence d'une série.
Le baron de Cauchy, fondateur de l'analyse moderne.	Vous constaterez que l'ordre d'exposition est celui que nous adoptons ici.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

2.1.2 Prérequis

1.Convergence d'une suite de nombres complexes

Définition identique à celle de la limite d'une suite réelle : il suffit de substituer le module à la valeur absolue.

Definition 2.1.

*La **suite de nombres complexes** (z_n) **converge vers** z si et seulement si la suite $(\mid z_n - z \mid)$ converge vers 0, ce qui s'écrit :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} \quad n_0 < n \Longrightarrow \mid z_n - z \mid < \varepsilon$$

Théorème 2.1.

1. La suite (z_n) converge vers z si et seulement si $(\mathcal{R}ez_n)$ tend vers $\mathcal{R}ez$ et si $(\mathcal{I}mz_n)$ tend vers $\mathcal{I}mz$.
2. Si la suite (z_n) converge vers le nombre complexe z, alors la suite $(\mid z_n \mid)$ converge vers $\mid z \mid$. La réciproque est fausse excepté dans le cas $z = 0$.
3. Si z est différent de 1, la suite (z^n) converge si et seulement si $\mid z \mid < 1$. La limite est alors respectivement 0.

démonstration. démonstration en cours

□

2. On suppose connue la formule de Taylor Lagrange

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ qui contient 0 et f une fonction de $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, la formule de Taylor-Lagrange s'écrit :

$$\forall x \in I \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \exists \theta \in]0,1[\quad f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\theta x)$$

où

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

Ceci permet d'écrire, lorque I contient 1, en choisissant $x = 1$:

$$\mid \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} - f(1) \mid \leq \frac{1}{(n+1)!} \underset{\theta \in [0,1]}{sup} \mid f^{n+1}(\theta) \mid$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

2.1.3 Définitions

Nous supposons donc acquis la notion de suite avec la notation $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour désigner la suite de terme général u_k.

2.1.3.1 Notions fondamentales

Definition 2.2.

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels ou complexes. On définit à partir de cette suite une nouvelle suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de terme général S_n définie par[a] *:*

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k. \tag{2.1}$$

Etudier ***la série de terme général*** *u_k, c'est étudier, non pas la suite $(u_k)_{n\in\mathbb{N}}$, mais la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par 2.1. On note la série de terme général u_k :*

$$\sum u_k.$$

Par définition la ***nature de la série*** *$\sum u_k$, est celle de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Autrement dit la série $\sum u_k$ diverge ou converge selon que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge ou converge.*

[a] L'étude de cette suite (S_n) fabriquée à l'aide de la suite (u_k) peut-être faite directement à partir d'une théorie qui va être développée dans ce cours et qui permet de raisonner sur le terme général u_k sans avoir à expliciter l'expression de la somme S_n, en effet (S_n) n'est pas une donnée initiale, la suite (u_k) est seul donnée

u_0	$S_0 = u_0$
u_1	$S_1 = u_0 + u_1$
u_2	$S_2 = u_0 + u_1 + u_2$
u_3	$S_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$
$\dots$	$\dots$
suite (u_n)	*suite* (S_n)

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

*Le terme d'indice n de la suite (S_n) est appelé la **somme partielle d'ordre** n de la série $\sum u_k$, notée*

$$u_0 + u_1 + ... u_n \qquad ou \qquad \sum_{k=0}^{k=n} u_k$$

*Lorsque la série $\sum u_k$ converge, la limite S de la suite (S_n), $n \in \mathbb{N}$, est appelée **la somme** S de la série $\sum u_k$, notée*

$$u_0 + u_1 + ... u_n + ... \qquad ou \qquad \sum_{k=0}^{k=+\infty} u_k$$

*Lorsque la série $\sum u_k$ converge, la différence $R_n = S - S_n$ est appelée le **reste d'ordre** n, R_n, de la série $\sum u_k$, notée*

$$u_{n+1} + ... u_{n+k} + ... \qquad ou \qquad \sum_{k=n+1}^{k=+\infty} u_k$$

2.1.3.2 Exemples de référence

Exemple de référence 2.1. ***:série exponentielle***

La série exponentielle est la série de terme général $\frac{1}{n!}$ défini pour $n \in \mathbb{N}$ [a]. *Cette série converge et a pour somme e :*

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... \frac{1}{n!} + ... = e \qquad s'écrit \qquad \sum_{k=0}^{k=+\infty} \frac{1}{k!} = e \tag{2.2}$$

[a] En particulier $u_0 = u_1 = 1$

Exemple de référence 2.2. ***: série harmonique alternée***

La série harmonique alternée est la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ si $1 \leq n$ et $u_0 = 0$. Cette série converge et a pour somme $\ln 2$.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + ... = \ln(2) \qquad s'écrit \qquad \sum_{k=1}^{k=+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exemple de référence 2.3. ***: série géométrique***

La série géométrique est la série de terme général $u_n = z^n$ défini pour $n \in \mathbb{N}$. Cette série converge si le module de z est strictement inférieur à 1 et a pour somme $\frac{1}{1-z}$. Elle diverge dans tous les autres cas.

$$| z |< 1 \quad 1 + z + z^2 - ... + z^n + ... = \frac{1}{1-z} \qquad s'écrit \qquad \sum_{k=0}^{k=+\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

démonstration.

$$z \neq 1 \quad S_n = 1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z}$$

$$| R_n |= \frac{| z |^{n+1}}{| 1 - z |}$$

□

Exemple de référence 2.4. ***: série harmonique***

La série harmonique est la série de terme général $u_0 = 0$, et $n \geq 1$ $u_n = \frac{1}{n}$. Cette série diverge.

démonstration.

□

Exemple de référence 2.5. ***: série de Riemann d'exposant 2***

La série de Riemann d'exposant 2 est la série de terme général $u_0 = 0$, et $n \geq 1$ $u_n = \frac{1}{n^2}$. Cette série converge.

démonstration.

□

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

2.1.3.3 Premières propriétés

2.1.3.4 Séries à termes complexes

Théorème 2.2. *partie réelle et partie imaginaire*

Une série $\sum u_k$ *où* $u_k = a_k + ib_k \quad (a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2$ *converge si et seulement la série des parties réelles,* $\sum a_k$*, et celle des parties imaginaires,* $\sum b_k$*, convergent. Alors*

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}(a_k + ib_k) = \sum_{k=0}^{k=\infty} a_k + i\sum_{k=0}^{k=\infty} b_k$$

démonstration. Cela résulte de la définition et de la propriété des suites de nombres complexes rappelée en 2.1. □

2.1.3.5 Espace vectoriel des séries convergentes

Definition 2.3.

Soit $\sum u_k$, $k \in \mathbb{N}$ *et* $\sum v_k$, $k \in \mathbb{N}$ *deux séries à termes réels ou complexes et* λ *un scalaire réel ou complexe, on sait définir (étude des suites) :*

- *la série* ***produit de la série*** $\sum u_n$ ***et du scalaire*** λ *de terme général* $w_k = \lambda u_k$
- *la série* ***somme des séries*** $\sum u_k$ *et* $\sum v_k$*, de terme général* $w_k = u_k + v_k$*,* $k \in \mathbb{N}$*.*

Théorème 2.3. *sous-espace vectoriel des séries convergentes*

Si les séries $\sum u_k$ *et* $\sum v_k$ *convergent alors, pour tout scalaire* λ*, chacune des séries* $\sum(\lambda u_k)$ *et* $\sum(u_k + v_k)$ *converge et :*

$$\sum_{k=0}^{k=+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{k=+\infty} u_k \qquad \sum_{k=0}^{k=+\infty}(u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{k=+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{k=+\infty} v_k \tag{2.3}$$

démonstration. En cours □

Application 1.

La somme d'une série convergente et d'une série divergente diverge.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Supposons que $w_n = u_n + v_n$, si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries divergentes on ne peut rien dire de la nature de $\sum w_n$. En particulier la série $\sum w_n$ peut très bien converger sans que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent et dans ce cas on ne peut pas écrire (2.3).

2.1.3.6 Divergence grossière

Proposition 5. *Le terme général d'une série convergente tend vers 0*
Si la série $\sum u_n$ converge alors la suite (u_n) tend vers 0. La réciproque est évidemment fausse.

démonstration. $u_n = S_n - S_{n-1}$ □
✓Cette condition nécessaire de convergence n'est pas suffisante : le terme général de la série harmonique tend vers 0 mais cette série diverge.

Definition 2.4.

*Une série **grossièrement divergente** est une série dont le terme général ne tend pas vers 0.*

Exemple 2.1.1.
Il en est ainsi de la série $\sum(-1)^n$.

2.1.3.7 Séries et suites

Cette démonstration établit une correspondance biunivoque entre série et suite des sommes partielles. Dans un premier temps nous définissons les séries à partir des suites. Nous allons dans la suite de ce cours introduire des outils permettant d'étudier directement les séries.

Definition 2.5.

*Etant donnée une suite $(S_n)_{0\leq n}$, on appelle **série des différences** associée à (S_n), la série qui a pour suite des sommes partielles (S_n). Son terme général est en effet :*

$$u_0 = S_0 \qquad u_k = S_k - S_{k-1} \quad 1 \leq k.$$

Théorème 2.4. *série des différences*

Une suite est de même nature que la série des différences associée.

Théorème 2.5. *suppression d'un nombre fini de termes*

On ne change pas la nature d'une série en supprimant un nombre fini de termes. De manière plus précise, s'il existe un entier n_0 tel que : $n_0 \leq n \quad u_n = v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. .

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

démonstration.

$$n_0 < n \quad \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} v_k + C \quad \text{où} \quad C = \sum_{k=0}^{k=n_0} u_k - \sum_{k=0}^{k=n_0} v_k$$

□

Application 2.
Cette propriété permet de passer d'une hypothèse réalisée pour chaque terme au cas où elle est vérifiée seulement à partir d'un certain rang.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

2.1.4 Séries à termes réels positifs

La suite des sommes partielles est alors une suite croissante, qui converge si et seulement si elle est majorée. Cette propriété permet d'établir de nombreux théorèmes de comparaison spécifiques des séries à termes réels de signe constant.

Remarque 2.1.1. D'après la propriété 2.5, tous les théorèmes énoncés pour les séries numériques à termes réels positifs sont en réalité vrais pour **les séries à termes positifs à partir d'un certain rang**. Nous ne mentionnerons plus dans la suite cette propriété.

2.1.4.1 Monotonie de la suite des sommes partielles

Théorème 2.6. *majoration des sommes partielles*

Une série à coefficients réels positifs est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

démonstration.
Soit (S_n) la suite des sommes partielles d'une telle série $\sum u_k$. La suite (S_n) est une suite croissante puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \qquad et \qquad u_{n+1} \geq 0$$

- soit cette suite est majorée et elle converge et alors

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \sup S_n / n \in \mathbb{N}$$

- soit cette suite n'est pas majorée et elle diverge et alors

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$$

□

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

2.1.4.2 Critères de comparaison des séries à termes positifs

Théorème 2.7. *comparaison en terme d' ordre*

Soient $\sum u_k$ et $\sum v_k$ deux séries à termes réels. Si $\sum u_k$ est à termes positifs et si pour tout entier k on a :

$$u_k \leq v_k$$

Si la série $\sum v_k$ converge, alors la série $\sum u_k$ converge et

$$\sum_{k=0}^{k=+\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{k=+\infty} v_k$$

démonstration. en cours □

Application 3.
Si la série $\sum u_k$ diverge, alors la série $\sum v_k$ diverge.

Exemple 2.1.2.
Nature de la série $\sum \frac{1}{1+k^2}$?, $\sum \frac{1}{k-1}$, $\sum \frac{1}{k-\cos k}$?

Rappelons les relations de comparaison définies en première année

Definition 2.6.
Soient (u_k) et (v_k) deux suites réelles telles qu'il existe un entier K et une suite (φ_k) vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad K \leq k \quad u_k = \varphi_k \cdot v_k \qquad 1 \leq k$$

Si	*(φ_k) est bornée,*	*(u_k) est dominée par (v_k)*	*noté*	$u_k = O(v_k)$
Si	*(φ_k) tend vers 1,*	*(u_k) est équivalente à (v_k)*	*noté*	$u_k \sim (v_k)$
Si	*(φ_k) tend vers 0,*	*(u_k) est négligeable devant (v_k)*	*noté*	$u_k = o(v_k)$

Remarque 2.1.2.
Dans la plupart des cas (v_k) est non nul à partir d'un certain rang et vous pourrez écrire :

Si la suite $(\frac{u_k}{v_k})$	est bornée	alors	$u_k = O(v_k)$
Si la suite $(\frac{u_k}{v_k})$	tend vers 1	alors	$u_k \sim v_k$
Si la suite $(\frac{u_k}{v_k})$	tend vers 0	alors	$u_k = o(v_k)$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Remarque 2.1.3.
Une écriture quantifiée de cette définition sera utile pour établir certains résultats théoriques. Vérifier ainsi que $u_k = O(v_k)$ est équivalent à écrire :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad |u_k| \leqslant M|v_k|\ .$$

Théorème 2.8. *comparaison en terme de domination*

Soient $\sum u_k$ et $\sum v_k$ des séries à termes réels positifs telles que (u_k) soit dominée par (v_k), la convergence de $\sum v_k$ entraîne celle de $\sum u_k$.

démonstration. En cours □

Corollaire 1.
A fortiori si $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont des séries à termes réels positifs telles que (u_k) est négligeable devant (v_k), la convergence de $\sum v_k$ entraîne celle de $\sum u_k$.

Exemple 2.1.3.
Nature de la série $\sum \dfrac{\sin^2 k}{k(k+1)}$, de la série $\sum \dfrac{\ln k}{k!}$?

Théorème 2.9. *comparaison en terme d'équivalents*

Soient $\sum u_k$ et $\sum v_k$ deux séries à termes réels, si $\sum v_k$ est à termes positifs et si (u_k) est équivalente à (v_k), alors la série $\sum u_k$ est de même nature que la série $\sum v_k$.

démonstration. : $u_k \sim v_k$ entraîne $u_k = O(v_k)$ et $v_k = O(u_k)$□

Exemple 2.1.4.
Nature de la série $\sum \dfrac{k^2 - \ln k}{k^3 - 2k + \cos k + 1}$ après avoir déterminé un équivalent simple de son terme général ?

2.1.4.3 Par comparaison avec des séries de Riemann

Exemple de référence 2.6. ***: série de Riemann***

La série de Riemann[a] d'exposant α est la série de terme général $u_0 = 0$, et $1 \leq k\ u_k = \dfrac{1}{k^\alpha}$. Cette série converge si et seulement si $1 < \alpha$.

[a] Parfois la série de Riemann est "cachée" $u_k = x^{\ln k}$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

démonstration. En cours□

Application 4. *utilisation de développements limités*
Si $(n \mapsto u_n)$ a un développement limité en $+\infty$, la partie principale de ce développement limité donne un équivalent de u_n proportionnel à $\frac{1}{n^\alpha}$.

Exemple 2.1.5.
Nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = (e^{\frac{1}{n^2}} - 1)\sqrt{n}$

Théorème 2.10. *règle $n^\alpha u_n$*

Soit $\sum u_k$ une série à termes positifs
1. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $u_k = O(\frac{1}{k^\alpha})$ ou $u_k = o(\frac{1}{k^\alpha})$ alors $\sum u_k$ converge.
2. S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $(\frac{1}{k})^\alpha = O(u_k)$ ou $(\frac{1}{k})^\alpha = o(u_k)$ alors $\sum u_k$ diverge.

démonstration. : en cours □

Exemple 2.1.6.
Nature des séries de termes généraux $u_k = \frac{\ln k}{k^2}$, $v_k = e^{-k}$.
Réponse : $u_k = \alpha_k \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ où $\alpha_k = \frac{\ln k}{\sqrt{k}}$, (α_k) tend vers 0. On peut aussi calculer $k^2 u_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ et vérifier : $\lim\limits_{k \to +\infty} k^2 u_k = 0$. Cette pratique justifie la dénomination de la propriété énoncée ci-dessus.
La série de Riemann $\sum \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ d'exposant $\frac{3}{2} > 1$ est convergente et donc $\sum u_k$ converge.

2.1.4.4 Par comparaison avec des séries géométriques

Si $\sqrt[k]{u_k}$ ou si $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ est constant égal à $\lambda > 0$, alors $\sum u_k$ est une série géométrique dont la nature dépend de la position de λ par rapport à 1. Les règles qui suivent permettent de déterminer la nature de séries à termes réels positifs $\sum u_k$, comparables à des séries géométriques au sens où, les suites $(\sqrt[k]{u_k})$ ou $(\frac{u_{k+1}}{u_k})$ convergent vers une constante λ.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Théorème 2.11. *règle de Cauchy*

Si $\sum u_k$ *est une série numérique à termes réels positifs telle que la suite* $(\sqrt[k]{u_k})$ *converge vers une limite* λ *alors :*
Si $\lambda < 1$ *alors la série* $\sum u_k$ *converge.*
Si $\lambda > 1$ *ou* $\lambda = 1^+$ *alors la série* $\sum u_k$ *diverge grossièrement.*

démonstration. :
$1 < \lambda \Rightarrow \exists K/K \leq \forall k \in \mathbb{N} \quad 1 < k \Rightarrow 1 < \sqrt[k]{u_k} \quad \text{et} \quad 1 < u_k$
$\lambda < 1 \Rightarrow \exists K/K \leq \forall k \in \mathbb{N} \quad 1 < k \Rightarrow \sqrt[k]{u_k} \leq \lambda_1 = \dfrac{1+\lambda}{2} < 1 \quad \text{et} \quad u_k^k \leq \lambda_1^k.$
Or $\sum \lambda_1^k$ converge. □

Exemple 2.1.7. Nature de la série $\sum(\dfrac{k}{1+ak})^k$ où a est un réel positif donné.

Remarque 2.1.4. Si $\lambda = 1^+$, la série diverge mais si $\lambda = 1$ (ou 1^-) il n'existe pas de résultat général comme le montrent les exemples de l'exercice 2.22.

Théorème 2.12. *règle d'Alembert*

Si $\sum u_k$ *est une série numérique à termes réels strictement positifs telle que la suite* $(\dfrac{u_{k+1}}{u_k})$ *ait une limite* λ *quand* k *tend vers* $+\infty$ *:*
Si $\lambda < 1$ *alors la série* $\sum u_k$ *converge.*
Si $\lambda > 1$ *ou* $\lambda = 1^+$ *alors la série* $\sum u_k$ *diverge grossièrement.*

démonstration. En cours □

Remarque 2.1.5. Si $\lambda = 1^+$, la série diverge, mais si $\lambda = 1$ (ou si $\lambda = 1^-$) il n'existe pas de résultat général.

Exemple 2.1.8. Déterminer en fonction du réel strictement positif r, la nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{r^n}{n^2}$.

2.1.4.5 Comparaison avec une intégrale

Théorème 2.13. *nature de* $\sum f(n)$

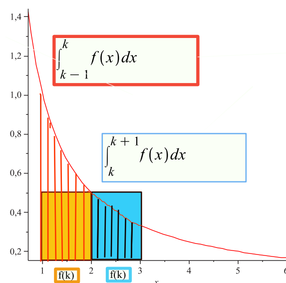
Si f *est une fonction numérique continue par morceaux positive et décroissante sur l'intervalle* $[n_0, +\infty[$*, où* n_0 *est un entier donné, l'intégrale* $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ *et la série* $\sum f(n)$, $n \geq n_0$ *sont de même nature.*

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

démonstration.
Observer sur le dessin ci-dessous :

$$u_k = f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)dt \quad \text{et} \quad u_k = f(k) = \int_{k}^{k+1} f(k)dt.$$

Montrer successivement :



$$\int_{k-1}^{k} f(k)dt \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_{k}^{k+1} f(t)dt \leq \int_{k1}^{k+1} f(k)dt$$

$$\int_{n_0}^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n_0}^{k=n} u_k \leq \int_{n_0-1}^{n} f(t)dt$$

Vous savez que l'intégrale impropre $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si la suite $(I_n = \int_{n_0}^{n} f(t)dt)$ converge, c'est à dire si et seulement si cette suite croissante est majorée. $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ est alors la limite de (I_n). Conclure en utilisant le théorème 2.6.

S_n désigne la somme partielle d'ordre n □

Exemple 2.1.9.
Nature de la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n(ln(n))^\beta}$

2.1.4.6 Séries absolument convergentes

2.1.4.7 Suites de Cauchy

Definition 2.7.
*Une suite (a_n) est une **suite de Cauchy** si :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad / \quad \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 \quad n > n_0 \quad et \quad m > m_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Proposition 6.
Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

démonstration.
La condition est nécessaire. Si la suite (a_n) converge, soit ε un réel strictement positif quelconque donné. Appliquons la définition de la limite, on peut trouver n_0 tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$$

On a alors

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad m > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_m - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$$

L'inégalité triangulaire permet d'écrire :

$$|a_m - a_n| \leq |(a_m - \lambda) + (\lambda - a_n)| \leq |a_m - \lambda| + |\lambda - a_n| \leq \varepsilon$$

□

Proposition 7. *critère de Cauchy de convergence d'une suite*
Une suite numérique à coefficients réels ou complexes est une suite convergente si et seulement si cette suite est une suite de Cauchy[1]*.*

démonstration. : en cours □

Conséquence :
Ce critère permet d'étudier la convergence d'une suite dont on ne connaît pas a priori la somme.

Théorème 2.14. *critère de Cauchy de convergence d'une série*

Une série numérique à coefficients réels ou complexes, $\sum u_k$, est une série convergente si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad / \quad \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 \quad n_0 < m < n$$
$$\Rightarrow \quad |u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_n| < \varepsilon$$

[0]Ceci est faux pour une suite à coefficients rationnels (il suffit de considérer la suite des valeurs décimales approchées de $\sqrt{2}$). Reprenant l'exemple 2 déjà étudié la suite des sommes partielles de la série de terme générale $u_n = \frac{1}{n!}$ constitue une suite de rationnels puisque $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ qui converge vers e

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

démonstration. : en cours □

Exemple de référence 2.7. *: La série harmonique, ne vérifie pas le critère de Cauchy*
Soit p un entier naturel non nul quelconque, on a :

$$S_2^{p+1} - S_2^p = \frac{1}{2^p+1} + ... + \frac{1}{2^{p+1}} = \frac{1}{2^p+1} + \frac{1}{2^p+2} + ... + \frac{1}{2^p+2^p} \dots$$

2.1.4.8 Absolue convergence

Definition 2.8. *Absolue convergence*

Une série à termes réels ou complexes $\sum u_n$ est dite absolument convergente, si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème 2.15. *convergence d'une série absolument convergente*

Si une série numérique à coefficients réels ou complexes est absolument convergente alors cette série est convergente.

démonstration. : en cours □

Exemple 2.1.10.

Montrer que pour tout nombre complexe z, la série de terme général $u_k = \dfrac{z^k}{k!}$ converge.

Montrer que la série de terme général $u_k = \dfrac{\sin k + (-1)^k \cos 2k}{k^2}$ converge.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

2.1.5 Semi-convergence

On commence toujours par étudier si une série est absolument convergente en s'appuyant sur les règles de comparaison des séries à termes réels positifs. Par contre nous avons vu que la série harmonique alternée converge sans être absolument convergente. On développe ici des méthodes plus côuteuses qui seront utilisées pour étudier la convergence de séries qui ne sont pas absolument convergentes.

Definition 2.9. *Semi-convergence*

Une série à termes réels ou complexes $\sum u_n$ qui converge sans être absolument convergente, est dite semi-convergente.

2.1.5.1 Critère des séries alternées

Definition 2.10.

Une série numérique à termes réels $\sum u_n$ est ***alternée*** *si pour tout entier n, u_n et u_{n+1} sont de signes contraires*

Conséquence :

- ou bien $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n |u_n|$
- ou bien $u_0 < 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^{n+1} |u_n|$

Théorème 2.16. *critère des séries alternées*

Si une série alternée vérifie les deux conditions :
(1) La suite (u_n) tend vers 0,
(2) La suite $(|u_n|)$ est décroissante
Alors cette série converge et de plus son reste d'ordre n a le signe du premier terme négligé et est majoré en valeur absolue par ce terme.

$$|R_n| \leq |u_{n+1}|$$

démonstration.
Les suites $(V_n = S_{2n})$ et $(W_n = S_{2n+1})$ sont adjacentes ...

Si $u_n = (-1)^n |u_n|$, pour $n = 2p$: $u_{2p+1} \leq R_n \leq 0$, et pour $n = 2p-1$: $0 < R_n < u_{2p}$.

...
□

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exemple de référence 2.8.

On appelle série de Riemann alternée d'exposant α la série de terme général : $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$, $1 \leq n$. *Cette série converge si et seulement si* $0 < \alpha$.[a].

[a] Si $\alpha < 0$ il y a divergence grossière, si $1 < \alpha$ convergence absolue

Definition 2.11.

La série numérique $\sum u_n$ *est* ***semi-convergente*** *si cette série est convergente sans être absolument convergente.*

Exemple 2.1.11.

La série de Riemann alternée de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$, $1 \leq n$ est semi-convergente si $0 < \alpha \leq 1$.

2.1.5.2 Méthode d'éclatement

Une erreur à ne pas faire :
Les termes généraux de deux séries semi-convergentes peuvent être des infiniments petits équivalents en $+\infty$ sans que ces séries soient de même nature, on retiendra des exemples comme :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \textit{et} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

On a $u_n \sim_{+\infty} v_n$, la série $\sum u_n$ converge (d'après le critère des séries alternées), or la série $\sum v_n$ comme somme de la série $\sum u_n$ qui converge et de la série harmonique qui diverge.
Lorsque le terme général u_n d'une série numérique n'est pas de signe constant, on ne peut déterminer la nature de la série en remplaçant u_n par un équivalent, il suffit par contre d'écrire u_n comme somme de séries de nature connues et d'un reste de la forme $r_p = o(\dfrac{1}{k^p})$ avec $p > 1$, en effet dans ce cas la série $\sum |r_p|$ converge selon le théorème (2.10).

Illustration de la méthode d'éclatement sur un exemple

Etude de la série $\sum u_n$ où $u_n = \ln(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}) \quad 2 \leq n$ en fonction du paramètre réel α

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

2.1.5.3 Complément : Théorème d'Abel

Le théorème d'Abel permet d'étudier en un certain nombre de séries et en particulier de séries de nombres complexes, de séries trigonométriques qui convergent sans être absolument convergentes. Ce théorème généralise le théorème des séries alternées mais s'appuie sur une sommation par parties qui peut être effectuée dans $\mathbb{C}$:

Lemme 2.1 (transformation d'Abel).
Soit (λ_n) et (v_n) deux suites de nombres réels ou complexes et V_n la somme partielle d'ordre n de la série de terme général v_n. On a la formule de "sommation par parties" :

$$\lambda_{m+1}v_{m+1} + \lambda_{m+2}v_{m+2} + \ldots + \lambda_n v_n = \lambda_n V_n - \lambda_m V_m - \sum_{i=m}^{i=n-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) V_i$$

démonstration. : On peut écrire cette formule sous la forme :

$$\sum_{i=m}^{i=n} \Lambda_i v_i = [\Lambda_i V_i]_{i=n}^{i=m} - \sum_{i=m}^{i=n-1} \lambda_i V_i$$

où Λ_i, défini par $\Lambda_i = \lambda_i - \lambda_{i-1}$, est le terme général de la série des différences de la série $\sum \lambda_i$ et où v_i, avec $v_i = V_i - V_{i-1}$, est le terme général de la série des différences de la série $\sum V_i$. en cours □

Proposition 8.
Soit (λ_n) une suite de nombres réels décroissante positive, si M majore en module les sommes partielles de la série $\sum v_n$, alors :

$$\lambda_{m+1}v_{m+1} + \lambda_{m+2}v_{m+2} + \ldots + \lambda_n v_n \leq 2\lambda_m M$$

démonstration.
Selon le lemme

$$\mid \sum_{i=m+1}^{i=n} \lambda_i v_i \mid \leq \lambda_m M + M \sum_{i=m}^{i=n-1} (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \lambda_n M$$

$$\lambda_m M + M \sum_{i=m}^{i=n-1} (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \lambda_n M = \lambda_m M + M(\lambda_m - \lambda_n) + \lambda_n M = 2\lambda_m M$$

□

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Théorème 2.17. *Critère d'Abel*

Soit (λ_n) *une suite de nombres réels décroissante qui tend vers 0 et* $\sum v_n$ *une série de nombres réels ou complexes dont les sommes partielles sont bornées alors la série* $\sum \lambda_n v_n$ *converge.*
De plus on peut majorer le module du reste d'ordre n : $\forall n \in \mathbb{N},\ |R_m| \leq 2\lambda_m M$.

démonstration. : en cours □

Remarque 2.1.6. la suite (Λ_n) est nécessairement une suite de nombres réels positifs.

2.1.6 Opérations sur les termes d'une serie

2.1.6.1 Associativité restreinte : Formalisation du procédé de sommation par paquets

2.1.6.2 idée intuitive : $u_n = \ln(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}) \quad 2 \leq n$

- Une idée naturelle : Vérifiez que u_{2k} et u_{2k+1} sont des réels opposés pour tout entier k. Quelle propriété de l'addition vous permet d'en déduire que les sommes partielles d'ordre impair de $\sum u_n$ sont nulles ? Montrer que $\sum u_n$ converge et a pour somme 0.
- Mais cette idée est non sans danger ! : Que se passe-t-il dans le cas de la série de terme général $v_n = (-1)^n$.

2.1.6.3 Sommation par paquets de p termes

Definition 2.12.

Soit p un entier donné, on dit que la série $\sum v_k$ *est une* ***série de paquets de p termes*** *de la série* $\sum u_k$[a] *si on a :*

$$\begin{aligned}
v_0 &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{p-1} \\
v_1 &= u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_{2p-1} \\
&\ldots \\
v_k &= u_{kp} + u_{kp+1} + u_{kp+2} + \cdots + u_{k(p+1)-1}
\end{aligned}$$

[a] ou obtenue par l'opération de **groupement de** p **termes consécutifs**

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Théorème 2.18. *Associativité restreinte*

1. *Toute série de paquets de p termes $\sum v_n$ d'une série convergente $\sum u_n$ converge et a même somme que la série $\sum u_n$.*
2. *La convergence d'une série de paquets de p termes $\sum v_k$ entraîne celle de $\sum u_k$ si la suite (u_k) tend vers 0.*

démonstration. idée de la démonstration :

$$\underbrace{u_0 + u_1 + \cdots + u_{p-1}}_{v_0} + \underbrace{u_p + \cdots + u_{2p-1}}_{v_1} + \cdots + \underbrace{u_{kp} + \cdots + u_{(k+1)p-1}}_{v_k} + \ldots +$$

$$V_k = U_{(k+1)p-1}$$

□

2.1.6.4 Permutation des termes - Commutativité

L'exemple ci-après vous montre que la commutativité de la somme (d'une nombre fini de termes) ne se généralise à une série. Pour cela nous nous donnons φ une application bijective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.

Exemple 2.1.12. :
La bijection φ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$ définie par :

$$\varphi(3n) = 4n \qquad \varphi(3n+1) = 2n+1 \qquad \varphi(3n+2) = 4n+2$$

On construit une série $\sum v_k$ en permutant les termes de la série harmonique alternée, $\sum u_k$:

$$v_k = u_{\varphi(k)}$$

$$v_{3n} = u_{4n} = \frac{1}{4n} \qquad v_{3n+1} = u_{2n+1} = \frac{-1}{2n+1} \qquad v_{3n+2} = u_{4n+2} = \frac{1}{4n+2}$$

Vérifiez que la série $\sum v_k$ est convergente mais n'a pas même somme que la série $\sum u_k$.
On pourrait choisir une bijection φ telle que $\sum u_{\varphi(k)}$ diverge.

Remarque 2.1.7.
La raison de la convergence d'une série semi-convergente n'est pas dans le fait que le terme général tende vite vers 0.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Definition 2.13.

*La série $\sum u_k$ est **commutativement convergente** si elle est de même nature et a même somme que toute série $\sum v_k$ obtenue par changement de l'ordre des termes c'est à dire de la forme*

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad v_k = u_{\varphi(k)}$$

où φ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.

Théorème 2.19. *absolue convergence et commutative convergence*

Une série absolument convergente est commutativement convergente

démonstration. Cas d'une série à termes positifs, $\sum v_k$ converge et a une somme inférieure ou égale à $\sum_{p=0}^{p=\infty} u_p$ car :

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{p=0}^{p=\varphi(n)} u_p \leq \sum_{p=0}^{p=\infty} u_p$$

En cours : cas d'une série à termes réels.[1] □

2.1.6.5 Produit de convolution de deux séries

Definition 2.14.

*On appelle **produit de convolution** des séries $\sum u_k$ et $\sum v_k$ la série de terme général w_k où*

$$w_p = \sum_{k=0}^{k=p} u_k v_{p-k} = \sum_{k+l=p} u_k v_l$$

Théorème 2.20. *produit de convolution de séries absolument convergentes*

Le produit de convolution $\sum w_n$ de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ absolument convergentes est une série absolument convergente et de plus

$$\sum_{p=0}^{p=+\infty} w_p = \sum_{k=0}^{k=+\infty} u_k \cdot \sum_{l=0}^{l=+\infty} v_l.$$

[1]On peut montrer qu'une série est absolument convergente si et seulement si elle est commutativement convergente

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

démonstration. Montrons tout d'abord que la série $\sum w_p$ est absolument convergente. $S_n = \sum_{p=0}^{p=n} |w_p|$, où $|w_p| \leq \sum_{k+l=p} |u_k v_l|$ d'où :

$$S_n \leq \sum_{k+l\leq n} |u_k||v_l| \leq \sum_{k\leq n\,\mathrm{et}\,p\leq n} |u_k||v_l| \leq \sum_{k=0}^{k=n} |u_k| \cdot \sum_{l=0}^{l=n} |v_l| \leq \sum_{k=0}^{k=\infty} |u_k| \cdot \sum_{l=0}^{l=\infty} |v_p|$$

Vérifions enfin l'égalité du produit des sommes et de la somme de $\sum w_p$, en montrant : $|\sum_{k=0}^{k=n} u_k \cdot \sum_{l=0}^{l=n} v_l - \sum_{p=0}^{p=n} w_p| \leq S_{2n} - S_n$:

$\lvert u_0v_0\rvert$	$\lvert u_0v_1\rvert$	$\lvert u_0v_2\rvert$	$\lvert u_0v_3\rvert$	$\lvert u_0v_4\rvert$
$\lvert u_1v_0\rvert$	$\lvert u_1v_1\rvert$	$\lvert u_1v_2\rvert$	$\lvert u_1v_3\rvert$	$\lvert u_1v_4\rvert$
$\lvert u_2v_0\rvert$	$\lvert u_2v_1\rvert$	$\lvert u_2v_2\rvert$	$\lvert u_2v_3\rvert$	$\lvert u_2v_4\rvert$
$\lvert u_3v_0\rvert$	$\lvert u_3v_1\rvert$	$\lvert u_3v_2\rvert$	$\lvert u_3v_3\rvert$	$\lvert u_3v_4\rvert$
$\lvert u_4v_0\rvert$	$\lvert u_4v_1\rvert$	$\lvert u_4v_2\rvert$	$\lvert u_4v_3\rvert$	$\lvert u_4v_4\rvert$
S_2	en jaune	S_4	en orangé	

□

La formule de Taylor permet de montrer que pour tout nombre réel x :

$$e^x = \sum_{k=0}^{k=+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Nous avons montré que pour tout nombre complexe z la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est normalement convergente. Ce qui permet de prolonger l'application exponentielle de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$.

Definition 2.15.

Pour tout nombre complexe z, on définit e^z comme la somme de la série $\sum \frac{z^n}{n!}$:

$$e^z = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Théorème 2.21. *absolue convergence et commutative convergence*

Pour tous nombres complexes z et z′ :

$$e^z e^{z'} = e^{z+z'}.$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

2.2 EXERCICES

2.2.1 Révisions suites

2.2.1.1 pour commencer

Exercice 2.1. *Révisions sur les suites adjacentes*
1. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) définies par

$$1 \leq n \qquad a_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln n$$

et

$$b_1 = 0 \quad 2 \leq n \qquad b_n = \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{k} - \ln n$$

sont adjacentes.
2. La limite de ces suites est la **constante d'Euler** notée γ. Exprimer la somme partielle d'ordre n, S_n, de la série harmonique de terme général $u_k = \dfrac{1}{k}$ en fonction de a_n. Que pouvez-vous dire de la suite (S_n) ?

indication : (a_n) décroissante en utilisant le théorème des accroissements finis

Exercice 2.2. *Séries télescopiques et révision sur les suites monotones*
On se propose d'étudier à partir de la définition, c'est à dire directement à partir des propriétés des suites, les séries de terme général

$$u_0 = 0 \qquad 1 \leq k \qquad u_k = \frac{1}{k.(k+1)} \qquad 1 \leq n$$

$$v_0 = 0 \qquad 1 \leq k \qquad v_k = \frac{1}{k^2} \qquad 1 \leq n$$

On note respectivement S_n et T_n les sommes partielles d'ordre n de ces séries.
1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(X+1)}$.
2. Rappeler la définition de S_n. En utilisant le résultat de la première question, vérifier que la somme de deux termes consécutifs "se simplifie" : on décrit ce processus en parlant de **série télescopique**. En déduire une expression simple de S_n comme fonction de n.
3. Montrer que la série de terme général u_k converge. Il y a cinquante ans, on aurait écrit que de plus :

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + ... \frac{1}{n.(n+1)} + ... = 1$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Justifiez ce résultat et donnez-en l'écriture, "plus abstraite" (celle aujourd'hui enseignée), avec le symbole $\sum$.
4. Montrer que la suite (T_n) des sommes partielles de la série de terme général v_k est une suite croissante.
5. Comparer v_k et u_{k-1}, en déduire que la suite (T_n) est majorée.
6. Que pouvez-vous dire de la série $\sum v_k$? Ce type de raisonnement par comparaison en terme d'ordre (qui est à la base de l'étude des séries à termes positifs du cours à venir) ne permet pas de trouver la somme de la série $\sum v_k$ mais seulement de déterminer sa nature.

2.2.1.2 Vous pouvez déjà aller plus loin

Exercice 2.3.

Après avoir traité les exercices précédents, déterminer la nature et calculer la somme de la série de terme général $u_0 = 0 \quad 1 \leq k \quad u_k = ln(\dfrac{k+1}{k})$.

2.2.2 Séries de référence

2.2.2.1 pour commencer

Exercice 2.4.

Montrer que si t est un réel quelconque donné, la série $\sum \dfrac{e^{ikt}}{3^k}$ converge.

Exercice 2.5.

1. Montrer que les séries $\sum \dfrac{\cos k\theta}{2^k}$ et $\sum \dfrac{\sin k\theta}{2^k}$ convergent.
2. Calculer la somme de ces séries et écrire les égalités obtenues pour $\theta = 0$, $\theta = \pi$,$\theta = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 2.6. *"Géométrique" et Restes*
On considère les séries de termes généraux

$$0 \leq k \qquad u_k = \frac{1}{2^k}$$

$$0 \leq k \qquad v_k = \frac{1}{1+2^k}$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

1. Calculer la somme de la série de terme général u_k, exprimer en fonction de n le reste d'ordre n R_n de cette série et montrer que si $10 < n$ alors $| R_n | \leq 10^{-3}$.
2. Montrer, en reprenant exactement le raisonnement par comparaison en terme d'ordre de l'exercice (2.2), que la série de terme général v_k converge.

3. Comme dans la plupart des cas bien que l'on sache que la série converge, il n'est pas possible de donner (en tous les cas pas facilement) la valeur de la somme V de cette série, on se propose de trouver une valeur approchée $\overline{V}$ de V à $2 \cdot 10^{-3}$ près. Les sommes partielles V_n constituent une approximation de V mais on n'a pas une expression simple en fonction de n de la différence, c'est à dire du reste d'ordre n, T_n de cette série. Montrer que T_n est majoré par R_n et en déduire que

$$\sum_{k=0}^{k=10} v_k$$

est une valeur approchée de V à 10^{-3} près puis donner une valeur décimale approchée $\overline{V}$ de V à $2 \cdot 10^{-3}$ près.

Exercice 2.7. *Taylor et indices*

1. Nous avons montré en cours que la série exponentielle de terme général $u_k = \sum \frac{1}{k!} 0 \leq k$ converge et a pour somme e. Retrouver la démonstration en utilisant la formule de Taylor Lagrange.
2. Ecrire le polynôme X^3 dans la base (1,X,X(X-1),X(X-1)(X-2)) de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Montrer que la série de terme général $v_k = \frac{k^3}{k!}$ converge et montrer que sa somme est 5e : vous utiliserez le résultat de la question précédente pour écrire cette série comme combinaison linéaire de séries extraites de la série exponentielle.

Exercice 2.8. *Taylor et Restes*

1. Calculer la somme partielle S_n de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n!}$ et R_n le reste d'ordre n de cette série pour $n = 2, 3, 4, 5, 10, 50, 100$ en utilisant Maple :

```
> restart:
> S:=n->sum(1/k!,k=1..n);
```


© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$$S := n \mapsto \frac{e^1 \Gamma(n+1,1) - \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1)}$$

```
> evalf(S(3));
```

$$1.666666667$$

```
> R:=n->sum(1/k!,k=n+1..infinity);
```

$$R := n \mapsto \frac{e^1 \Gamma(n+2) + (-1-n) e^1 \Gamma(n+1,1)}{(n+1)!}$$

```
> evalf(R(3));
```

$$0.051615161$$

et compléter le tableau suivant

$S_2 = \frac{5}{2} = 2.5$ $R_2 \cong ?$	$S_{10} = \frac{9864101}{3628800} \cong ?$ $R_{10} \cong 310^{-8}$
$S_3 = \frac{8}{3}$ $R_3 \cong ?$	$S_{20} \cong ?$ $R_{20} \cong ?$
$S_4 = \frac{65}{24} \cong ?$ $R_4 \cong ?$	$S_{50} \cong ?$ $R_{50} \cong ?$
$S_{100} \cong ? =$	$R_{100} \cong 10^{-160}$

2. Remarquer que les sommes partielles de cette série semblent converger rapidement vers e. Préciser ce résultat en montrant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < R_n < \frac{e}{(n+1)!}$$

3. Quelle majoration obtenez vous pour le reste d'ordre n de la série harmonique alternée ? Que pouvez-vous dire comparativement de la vitesse de convergence de cette série.

2.2.2.2 pour aller plus loin

Exercice 2.9. *Fabriquer du géométrique*
Soit z un nombre complexe non nul de module strictement inférieur à 1. On se propose d'étudier la série de terme général $u_k = kz^{k-1}$

1. Calculer (1-z)S_n
2. Montrer que cette série converge et calculer sa somme

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exercice 2.10. *Plus difficile !*
Nous avons vu en cours que la série harmonique diverge, on "enlève" quelques termes à cette série, ceux qui correspondent à des entiers k qui s'écrivent avec au moins un chiffre 0.

1. Est-ce qu'on "enlève" beaucoup de termes ?
2. Quelle est la nature de la série de terme général u_k ainsi définie : $u_k = 0$ si le chiffre 0 intervient dans l'écriture du nombre entier k et $u_k = \frac{1}{k}$ sinon.

2.2.3 Premières propriétés

2.2.3.1 apprentissage du cours

Exercice 2.11.

Quelle est la nature des séries de terme général $u_k = \frac{1}{k!} - \frac{1}{k} \quad 1 \leq k$, $v_k = \frac{1}{2k+1} \quad 0 \leq k$?

Exercice 2.12.

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries convergentes telles que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n$ Montrer que les restes d'ordre n vérifient :

$$\sum_{k=n+1}^{k=+\infty} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{k=+\infty} v_k$$

Répondre à la question (1)3. du QCM1 .

Exercice 2.13.
Soit $\sum u_k$ une série convergente, peut-on écrire

$$\sum_{k=0}^{k=+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{k=+\infty} u_{2k} + \sum_{k=0}^{k=+\infty} u_{2k+1} ?$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

2.2.4 Termes positifs, ordre-équivalence-domination

2.2.4.1 pour commencer

Exercice 2.14.
Dans chacun des cas suivants, comparer u_k à $\frac{1}{k^2}$. En déduire la nature de la série $\sum u_k$:

$$u_k = \frac{1+k}{k^3 \ln k} \quad 1 \leq k$$
$$u_k = \frac{\ln k}{k^3} \quad 1 \leq k$$
$$u_k = \frac{|\sin k|}{k^2} \quad 1 \leq k$$
$$u_k = \frac{k + \ln(k+k^2)}{k^3} \quad 1 \leq k$$
$$u_k = \ln \frac{k^2+k^3}{1+k^3} \quad 1 \leq k$$
$$u_k = \exp(-k) \quad 0 \leq k$$
$$u_k = e^{-\sqrt{k}}$$

Exercice 2.15. Dans chacun des cas suivants, comparer u_k à une série de référence et en déduire la nature de la série $\sum u_k$:

$$u_k = \frac{1}{k! + \sqrt{k}}$$
$$u_k = \frac{1}{k! - \cos^2 k}$$
$$u_k = \frac{\ln k}{k} \quad 1 \leq k$$
$$u_k = \frac{\ln k + k}{k^2+1} \quad 1 \leq k$$
$$u_k = \frac{\ln(k^3+1)+1}{\sqrt{k}(k^2+1)} \quad 1 \leq k$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exercice 2.16. *comparaison en terme d'équivalence*
Déterminer en fonction des valeurs de x et de y, réels strictement positifs, un équivalent simple de $u_k = \dfrac{x^k + y^k}{y^k + 1}$ et

$$v_k = x \exp \frac{1+k^2}{k^2} - e \cdot y \quad 1 \leq k$$

En déduire la nature des séries $\sum u_k$ et $\sum v_k$.

Exercice 2.17. *comparaison et rapport*
Soient $\sum u_k$ une série à termes positifs et $\sum v_k$ une série à termes strictement positifs telles que la suite $(\dfrac{u_k}{v_k})$ converge et a pour limite λ. Que pouvez-vous dire de λ ? Les séries u_k et v_k sont-elles nécessairement de même nature ?

2.2.4.2 pour aller plus loin

Exercice 2.18. *sommation des relations de comparaison*
Soient $\sum u_k$ et $\sum v_k$ deux séries à termes réels positifs telles que $u_k = O(v_k)$.

1. Que pouvez vous dire de la suite des sommes d'ordre n de chacune de ces séries lorsque $\sum u_k$ est une série divergente ? Montrer qu'alors

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = O(\sum_{k=0}^{k=n} v_k)$$

2. Que pouvez vous dire de la suite des restes d'ordre n de chacune de ces séries lorsque $\sum v_k$ est une série convergente ? Montrer qu'alors

$$\sum_{k=n+1}^{k=\infty} u_k = O(\sum_{k=n+1}^{k=\infty} v_k)$$

3. On suppose que de plus $u_k \sim v_k$ montrer que si ces séries divergent

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k \sim \sum_{k=0}^{k=n} v_k.$$

   Enoncer une règle de sommation des équivalents.
   En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{k=n} \sqrt[k]{k}$ puis montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{k=n} \sqrt[k]{k}}$ diverge.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

4. On suppose que de plus $u_k \sim v_k$, montrer que si ces séries convergent

$$\sum_{k=n+1}^{k=\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{k=\infty} v_k$$

Exercice 2.19. *Séries de Riemann*
1.Etablir que

$$\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}} \underset{\infty}{\sim} \frac{\alpha-1}{k^\alpha}$$

2.En déduire que la série $\sum \frac{1}{k^\alpha}$. converge si et seulement si $1 < \alpha$.
3.Montrer que le reste d'ordre n de la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ est équivalent à $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.
4. Calculer avec Maple une valeur approchée du reste d'ordre 100 des séries de Riemann d'exposants 2,3,4,5. Le résultat numérique, vous semble-t-il compatible avec le résultat théorique obtenu.

2.2.5 Termes positifs : Riemann, géométriques ou intégrale

2.2.5.1 apprentissage du cours

Nous introduisons désormais différentes notations pour l'indice du terme général d'une série.

Exercice 2.20. *Pourquoi on démontre la règle de Cauchy en (2.11) avec la définition quantifiée de la limite*
1. Soit r un réel positif, déterminer la limite de la suite (v_k) de terme général

$$v_k = (1 + \frac{1}{k^r})^k.$$

2. A-t-on

$$\sqrt[k]{u_k} \sim \lambda \Rightarrow u_k \sim \lambda^k?$$

Exercice 2.21.

1. Déterminer de plusieurs manières la nature de la série $\sum \frac{1}{(1+\sqrt{n})^n}$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

2. Montrer que la série $\sum \frac{n!}{n^n} \quad 1 \leq n$ converge et en déduire $n! = 0(n^n)$[1]

Exercice 2.22. *Si* $(\sqrt[n]{u_n})$ *tend vers 1, Cauchy ne permet pas de conclure*
Montrer que la série harmonique et la série de terme général
$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ vérifient toutes deux l'égalité $\lim_{n \to +\infty}(\sqrt[n]{u_n}) = 1$ mais que ces séries sont de nature différentes.

Exercice 2.23.
Nature des séries de terme général $(\frac{n}{n+1})^{n^2} \quad 0 \leq n$, $\frac{n}{2^n}$, $\sum n^\alpha a^n \quad 1 \leq n$, $(a - \frac{1}{n})^{2n}$, $(1 + \frac{1}{n^2})^2$, $\frac{n^a}{2^n}$, $\exp - \sqrt{n}$ où a est un réel strictement positif donné.

Exercice 2.24. *Pourquoi la règle de Cauchy n'est pas énoncée en terme de limite dans certains manuels ?*
1. Le but de cet exercice est de vérifier que l'énoncé de la règle de Cauchy donnée en cours décrit une situation simple mais peut être prolongé dans certains cas alors que la suite $(\sqrt[k]{u_k})$ n'a pas de limite. Etant donnée une série numérique à termes réels positifs, $\sum u_k$, montrer que si à partir d'un certain rang la suite $(\sqrt[k]{u_k})$ est majorée par un réel λ strictement inférieur à 1 alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Montrer de même que si pour une infinité de termes la suite $(\sqrt[k]{u_k})$ est minorée par 1 alors la série $\sum u_k$ diverge.
3. Trouver un cas où le résultat obtenu dans la première question permet de montrer la convergence de la série alors que $(\sqrt[k]{u_k})$ n'a pas de limite. Trouver un cas où le résultat obtenu dans la deuxième question permet de montrer la convergence de la série alors que $(\sqrt[k]{u_k})$ n'a pas de limite.

4. Ecrire un résultat analogue qui généralise la règle d'Alembert.

Exercice 2.25.

1. Montrer que si β est négatif ou nul, la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ diverge.
2. Etudier lorsque le réel β est strictement positif la nature de la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ en fonction du réel β.
3. Montrer par comparaison à des séries de Riemann que la série de Bertrand $\sum \frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^\beta}$ diverge quelle que soit le réel β.

---

[1] La formule de Stirling précise ce résultat : $n! \sim \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

4. Montrer par comparaison à des séries de Riemann que la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^2(\ln n)^\beta}$ converge quelle que soit le réel β.
5. Montrer par comparaison à des séries de Riemann que la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ converge lorsque $1 < \alpha$ et diverge si $\alpha < 1$.

Exercice 2.26.
Trouver des séries numériques dont vous pouvez facilement déterminer la nature en utilisant la comparaison à une intégrale
Trouver plusieurs séries numériques à termes positifs telles que la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{n} f(t)dt$ sont de "natures différentes".

2.2.5.2 pour aller plus loin

Exercice 2.27. calcul de π
En 1910, le mathématicien Indien Ramanujan découvre une formule permettant de calculer π ; elle s'écrit :

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n \qquad u_n = \frac{\sqrt{8}}{9801}\frac{(4n)!}{(n!)^4} \cdot \frac{1103 + n26390}{396^{4n}}$$

Cette formule est utilisée dans de nombreux programmes informatiques pour calculer les décimales de π. Publiée en 1914, sa démonstration ne paraît que en 1985, date à laquelle elle permit de calculer **17 millions de décimales** de π.

1. Montrer que la série de Ramanujan converge.
2. Qu'observe-t-on en utilisant la commande "evalf(,100)" de Maple appliquée à l'inverse de la somme partielle d'ordre 15 de cette série et à la valeur approchée de π avec 100 décimales ?
3. Montrer que lorsqu'une série à termes strictement positifs $\sum v_n$ converge par le critère d'Alembert avec $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq r < 1$ alors le reste d'ordre R_n vérifie :
$$R_n \leq \frac{r}{1-r}v_n.$$
4. Vérifier que la somme partielle d'ordre (n+1) de la série de Ramanujan donne huit décimales exactes de plus que la somme partielle d'ordre n.

Exercice 2.28.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

1. On considère la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \qquad u_n = \frac{n!}{(\frac{n}{e})^n}$$

   (a) Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+$$

   (b) Donnez la nature de la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$$

2. On considère la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \qquad v_n = \frac{1}{n(Ln(n))^k}$$

   où k est un nombre réel strictement positif donné.

   (a) Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1^-$$

   (b) Donnez, en fonction de k, la nature de la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$$

Exercice 2.29.
Soit f une application décroissante sur $[n_0, +\infty[$, telle que la série à termes positifs $\sum f(n)$ converge. Montrer que, pour n supérieur à n_0, le reste d'ordre, R_n, vérifie :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq R_n \leq \int_{n}^{+\infty} f(t)dt$$

puis vérifier que si $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$, on obtient :

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

Comparer au résultat obtenu en 2.19

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

2.2.6 Des séries aux suites

Exercice 2.30. *Comparer au premier exercice*
Montrer que pour tout entier n,

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$$

On se propose d'étudier directement la suite (a_n) où

$$a_n = (\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}) - \ln(n)$$

1 Etudier la nature de la série de terme général $u_n = a_n - a_{n-1}$ après avoir exprimé u_n en fonction de n.
2 En déduire la nature de la suite (a_n) ?

2.2.7 Semi-convergence

2.2.7.1 apprentissage du cours

Exercice 2.31. *séries alternées*

1. Vérifier que la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$ converge $n \geq 2$.
2. Pour quelles valeurs de n a-t-on $|R_n| \leq 10^{-3}$?

Exercice 2.32.
Nature des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ où $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$, $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ et $w_n = \ln(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$.

2.2.7.2 pour aller plus loin

Exercice 2.33.
Quelle est, en fonction de α, la nature de la suite de terme général

$$a_n = \prod_{p=1}^{p=n}(1 + \frac{(-1)^{p+1}}{p^\alpha})$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

2.2.8 Opérations sur les termes d'une série

Exercice 2.34. *opérations sur les termes d'une série*
Soit la série $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$. Vérifier que la série $\sum v_n$ obtenue par groupements de deux termes consécutifs est absolument convergente.
$\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?

Exercice 2.35. *opérations sur les termes d'une série*
Nature du produit de convolution des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ où

$$u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Exercice 2.36. *opérations sur les termes d'une série*
Rappeler la définition vue en cours de e^z où z est un nombre complexe donné et montrer $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$

2.2.9 Synthèse

Exercice 2.37.
1 Nature de la suite

$$b_n = \prod_{k=1}^{k=n} (2 - e^{\frac{1}{k}})$$

2 Nature des séries

$$u_n = e^{-n^r \ln(\cos \frac{1}{n})} \quad \text{r réel donné}$$

Exercice 2.38.
1. Donner un développement limité à l'ordre 3 de u_k

$$u_k = k \ln k - 1 - (k-1)\ln(k-1) - \frac{1}{2}(\ln k + \ln(k-1))$$

2. Montrer que $u_k \sim v_k$ où $v_k = \dfrac{1}{12k^2}$.
3. On se propose d'évaluer le reste d'ordre n, R_n de la série $\sum u_k$. Utiliser les résultats sur les restes des séries, établis dans les exercices (4.14) et (2.19), pour montrer que le reste d'ordre n de la série $\sum v_k$ est équivalent à $r_n = \dfrac{1}{12n}$.
4 Montrer que si on introduit la série télescopique $\sum w_k$ de terme général

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$w_k = r_{k-1} - r_k$, alors on a $d_k = u_k - w_k = 0(\frac{1}{n^3})$.
5 En déduire que $R_n = r_n + 0(\frac{1}{n^2})$.

Exercice 2.39.
Nous reprenons l'exercice 4.19 dans le but de trouver une valeur approchée de la constante d'Euler γ définie par :

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} a_n \qquad \text{où} \qquad a_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln n$$

1. Nous savons que la limite de la suite (a_n), γ, est la somme de la série des différences $\sum u_n$ définie par la suite (a_n). Chaque somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$ approche la somme γ de cette série avec une "erreur de méthode" égale au reste d'ordre n. Evaluer le reste d'ordre n permet d'estimer cette erreur inhérente au procédé d'approximation et à laquelle s'ajoutent les erreurs de calcul. Donner un équivalent de u_n et en déduire en utilisant les résultats sur les restes des séries, établis dans les exercices (4.14) et (2.19), que le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$ est équivalent à $r_n = \frac{-1}{2n}$.
2. Introduisons comme dans l'exercice précédent la série télescopique $w_n = r_{n-1} - r_n$. Montrer que la suite de terme général $d_n = u_n - w_n$ est équivalente à la suite $\frac{1}{6n^3}$. Comparer, en utilisant Maple, la somme partielle U_{50} d'ordre 50 de la série $\sum u_n$ avec $U_{50} + r_{50}$ et la valeur approchée de γ à 10^{-8} près $\overline{\gamma} = 0.57721566$. Conclure ?
3. Pouvez-vous réitérer ce procédé et obtenir une expression de la forme $U_n + r_n + \delta_n$ qui converge plus vite vers γ ?

Exercice 2.40.
Nature de la série numérique de terme général $u_k = (-1)^k \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}}{k^\alpha}$ en fonction de α réel donné.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Q.C.M 1
groupes 49 et 51
Le 22 octobre 2008

Indiquer dans la colonne de droite si l'énoncé est Vrai ou Faux.

1.

$a_k = \dfrac{\sin 2k}{(\sqrt{3})^k}$	Réponse
1. $\sum a_k$ diverge	
2. Nous pouvons affirmer sans vérification que le reste d'ordre n de cette série est majoré par $\dfrac{\sin 2(n+1)}{(\sqrt{3})^{n+1}}$	
3. Nous pouvons affirmer sans vérification que le reste d'ordre n de cette série est majoré par $\dfrac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^{n+1}(\sqrt{3}-1)}$	

2.

$b_k = \dfrac{\sin 2k}{k^{\sqrt{3}}}$ et $c_k = \dfrac{\ln k}{k^{\sqrt{3}}}$	Réponse
1. $b_k \sim \dfrac{2}{k^{(\sqrt{3}-1)}}$	
2. $\sum b_k$ diverge	
3. $b_k = 0(c_k)$	
4. Si une série $\sum c_k$ converge et si $b_k = o(c_k)$ alors $\sum b_k$ converge	
5. $\sum c_k$ diverge	

3.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$u_k = (-1)^k \dfrac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}}{k^\alpha}$ où $0 < \alpha$	Réponse
1. $\sum u_k$ est une série alternée	
2. $\sum u_k$ est une série convergente	
3. Nous pouvons affirmer sans vérification que le reste d'ordre n est majoré par $\dfrac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{(n+1)^\alpha}$	
4. Nous pouvons affirmer sans vérification que le reste d'ordre n est majoré par $\dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n^\alpha}$	

4.

$v_k = (-1)^k \dfrac{\sin k}{k^2}$	Réponse
1. $\sum v_k$ est une série alternée	
2. $\sum v_k$ est une série convergente.	

5.

$S_n = \sum_{k=2}^{k=n} (\ln k))^2$	Réponse
1. $\int_1^n (\ln x)^2 dx \leq S_n \leq \int_2^{n+1} (\ln x)^2 dx$	
2. $\int_2^{n+1} (\ln x)^2 dx \leq S_n \leq \int_1^n (\ln x)^2 dx$	

6.

$u_n = \dfrac{(ln(n))^n}{n!} \qquad v_n = (\dfrac{ln(n)}{n!})^n$	Réponse
La série $\sum u_n$ converge	
La série $\sum v_n$ converge	

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Chapitre 3

SUITES ET SERIES D'APPLICATIONS

Sommaire

3.1 COURS

3.1.1 Introduction

3.1.1.1 Résumé

Le passage à la limite est un procédé mathématique permettant à la fois de créer de nouveaux objets mathématiques et d'étudier des objets mathématiques difficiles à appréhender en les considérant comme limites d'objets

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

mathématiques simples. Ce chapitre définit d'abord pour les suites puis pour les séries :

> Une notion première de limite d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications définies sur un ensemble A appelée **limite simple** de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur A lorsque en chaque point x de A la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite notée $\lambda_x = f(x)$.
> Puis, celle plus restrictive de **limite uniforme** de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur A, lorsque la suite numérique $\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|$ tend vers 0. L'étude est fondée autant que possible sur les propriétés de la borne supérieure étudiées en première année.
> Enfin est posée la question des propriétés de la limite. Ainsi le passage à la limite simple ne conserve pas la continuité des applications, au sens où, les applications f_n peuvent être continues sur A sans que l'application limite f ne le soit, ni leur Riemann-intégrabilité. Ces propriétés sont en revanche conservées par passage à la limite uniforme [1].

3.1.1.2 Positionnement mathématique

Cauchy lui-même, alors qu'il contribua de manière essentielle à la mise en place des notions de convergence d'une série et de continuité d'une fonction, ne vit pas tout de suite que la limite au sens de la limite simple de fonctions continues n'est pas nécessairement continue, et c'est seulement au milieu du XIXe siècle que Stokes et Seidel dégagent la notion de limite plus restrictive qu'est la limite uniforme.

[1] tout ne marche pas ! ainsi la dérivabilité n'est pas conservée par passage à la limite uniforme

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

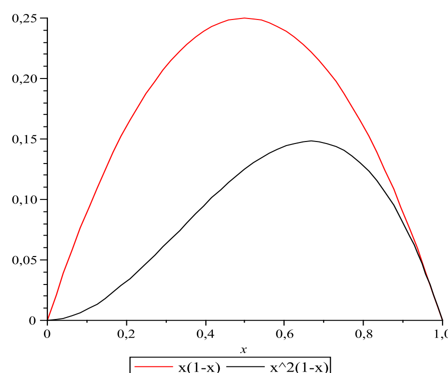
3.1.2 Suites d'applications

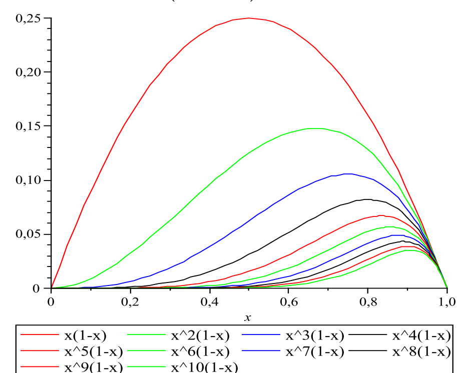
3.1.2.1 Définitions

On se donne un sous-ensemble B de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, A, un sous-ensemble de B. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications de B dans $\mathbb{K}$ que nous noterons dans la suite (f_n).

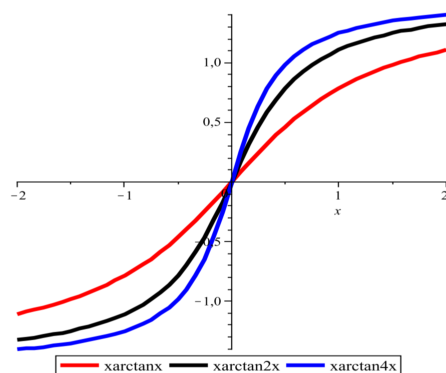
3.1.2.2 Exemples

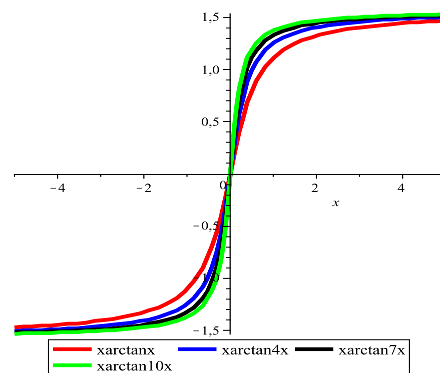
Etude de la suite (f_n) définie par $f_n \;:\; \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n(1-x) \end{array}$





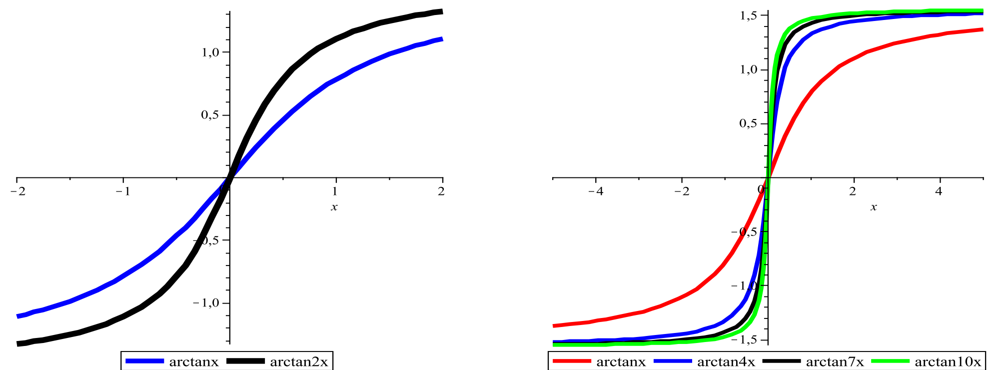
Etude de la suite (g_n) définie par $g_n \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arctan nx \end{array}$





© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Etude de la suite (h_n) définie par $h_n \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \arctan(nx) \end{array}$



3.1.2.3 Définition de la convergence simple

Definition 3.1.

*Une application de $\mathbb{N}$ (resp. de $\{n \in \mathbb{N}/n \geq n_0\}$) dans l'ensemble des applications de A dans $\mathbb{K}$ ($n \longrightarrow f_n$) définit une **suite d'applications** de A dans $\mathbb{K}$ que nous noterons (f_n). (resp. $(f_n)_{n \geq n_0}$)*

Definition 3.2.

***La suite d'applications** (f_n) **converge simplement sur** A si pour tout élément z de A, la suite numérique $(f_n(z))$ converge.*

Théorème 3.1. *unicité de la limite*

Si la suite d'applications (f_n) est simplement convergente sur A, il existe alors une unique application f définie sur A par

$$\forall z \in A, \qquad f(z) = \lim_{n \to +\infty} f_n(z) \tag{3.1}$$

Definition 3.3.

*Si la suite d'applications (f_n) est convergente l'application f qui à chaque point z de A associe la limite de la suite numérique $(f_n(z))$ est appelée la **limite simple de la suite d'applications** (f_n) **sur** A . On note*

$$f = \lim_{n \to +\infty} f_n$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Régle pratique 3.1.
✓ On fixe z un élément arbitraire dans A et on étudie la nature de la suite numérique $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de z, qui intervient comme paramètre[1]

Exemples

1

$A = [0,1]$	$f_n(x) = x^n(1-x)$	
$x$fixé	étude de la suite numérique	$(f_n(x))$
$x = 1$	$f_n(1) = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$
$0 \leq x < 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0 \Rightarrow$	$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$

La suite d'applications (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers l'application nulle.

2

$A = \mathbb{R}$	$f_n(x) = \arctan(nx)$	
x fixé	étude de la suite numérique	$(f_n(x))$
$x = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} n0 = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$
$0 < x$	$\lim\limits_{n\to+\infty} nx = +\infty \Rightarrow$	$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \dfrac{\pi}{2}$
$0 < x$	$\lim\limits_{n\to+\infty} nx = +\infty \Rightarrow$	$\lim\limits_{n\to-\infty} f_n(x) = -\dfrac{\pi}{2}$

La suite d'applications (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers l'application qui vaut 0 en 0, $\dfrac{\pi}{2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $-\dfrac{\pi}{2}$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

3

$A = \mathbb{R} \quad f_n(x) = x\arctan(nx)$

Vérifier que la suite d'applications (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers l'application qui vaut $\dfrac{\pi}{2}|x|$.

Ecriture quantifiée :
Pour des études théoriques il faut parfois écrire la définition de la limite

$$\forall x \in A \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N_{\varepsilon,x} \quad / \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \big(N_{\varepsilon,x} < n \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\big)$$

3.1.2.4 Définition de la convergence uniforme

données :
(f_n) suite d'applications de A dans $\mathbb{K}$

[1]S'il existe un élément z de A tel que la suite numérique $(f_n(z))$ ne converge pas alors la suite d'applications (f_n) ne converge pas simplement sur A

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$c_n = \sup\{|f_n(z)|/z \in A\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Definition 3.4. *norme uniforme sur A*

Si f_n est une application bornée de A dans $\mathbb{K}$, $c_n = \sup\{|f_n(z)|/z \in A\}$ est un réel positif ou nul, appelé norme uniforme de f_n sur A.
On note $c_n = \|f_n\|_\infty^A$ ou $c_n = \|f_n\|_\infty$

rappel :
f_n est bornée de A dans $\mathbb{K}$ et a pour norme uniforme c_n sur A s'écrit donc : c_n est un majorant et $c_n - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $\{|f_n(z)| \,/\, z \in A\}$, soit

$$\begin{cases} \forall z \in A \quad |f_n(z)| \leq c_n \\ \text{et} \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*} \quad \exists z \in A \quad / \quad c_n - \varepsilon \leq |f_n(z)| \end{cases} \tag{3.2}$$

Exemple
La suite (f_n) où $f_n(z) = z^n$ converge uniformément vers l'application nulle sur $A = \{z \in \mathbb{C} \quad / \quad |z| \leq R\}$ lorsque $0 < R < 1$ car $\|f_n\|_\infty^A \leq R^n$ et $\lim_{n \to +\infty} R^n = 0$.
Montrer que $f_n(z) = z^n$ ne converge pas uniformément vers l'application nulle sur $A = \{z \in \mathbb{C} \quad / \quad |z| < 1\}$ car $\|f_n\|_\infty^A = 1$.

Régle pratique 3.2.
Dans le cas où A est une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels f_n est dérivable, le tableau de variation de f_n permet de vérifier que f_n est bornée et de donner la norme uniforme de f_n.

Exemples
1
$A = [0,1]$ $\qquad f_n(x) = x^n(1-x)$
n fixé
$f_n'(x) = x^{n-1}(n-(n+1)x) = (n+1)x^{n-1}\left(\frac{n}{n+1} - x\right)$

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
signe de $f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f_n	0	$\nearrow$	c_n	$\searrow$	0

D'où $\|f_n\|_\infty^A = c_n = \dfrac{n^n}{(n+1)^{(n+1)}}$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Definition 3.5.

1. *La suite d'applications* (f_n) ***converge uniformément vers l'application nulle sur A*** *si à partir d'un certain rang les applications* f_n *sont bornées et si la suite numérique* $(c_n = \|f_n\|_\infty^A)$ *converge vers 0.*
2. *La suite* (f_n) ***converge uniformément vers f sur A*** *si la suite* $(f_n - f)$ *converge uniformément vers l'application nulle sur* A*.*
3. *La suite* (f_n) ***converge uniformément sur A****, s'il existe une application* f *telle que la suite* (f_n) *converge uniformément vers* f *sur* A*.*

Théorème 3.2. *convergence uniforme entraîne convergence simple*

Si une suite d'applications converge uniformément[a]*vers* f *sur* A *alors elle converge simplement vers* f *sur* A

démonstration. : en cours □

Exemples

1

$A = [0,1] \qquad f_n(x) = x^n(1-x)$

• n fixé $\qquad \|f_n\|_\infty^A = \dfrac{1}{n+1}(\dfrac{n}{n+1})^n$

• étude de la suite numérique $(\|f_n\|_\infty^A)$

$$\frac{1}{n+1}(\frac{n}{n+1})^n = \frac{1}{n+1}\exp\big(-nln(\frac{n+1}{n})\big)$$

$$\lim_{n\to+\infty}(-n\ln(\frac{n+1}{n})) = -1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\big(\frac{n}{n+1}\big)^n = \frac{1}{e} \quad \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\|f_n\|_\infty^A = 0$$

La suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

2

$A = \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \arctan(nx)$

n fixé

x	$-\infty$		0		$+\infty$
expression de $f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
expression de $\big(f_n(x) - f(x)\big)$	$\arctan(nx) + \frac{\pi}{2}$		0		$\arctan(nx) - \frac{\pi}{2}$
variations de $f_n - f$	0	↗	$\frac{\pi}{2}\|0\| - \frac{\pi}{2}$	↗	0

[2]on dit alors que f est la limite de la suite (f_n) sur A et on précise que la suite converge simplement ou uniformément

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = \frac{\pi}{2}$
La suite numérique $(\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}})$ ne tend pas vers 0. La suite d'applications (f_n) ne converge pas uniformément vers f.

Seconde méthode : pour tout entier n non nul fixé

$$(f_n - f)\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \|f_n - f\|_\infty^{\mathbb{R}}.$$

Ce qui montre que la suite numérique $(\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}})$ ne tend pas vers 0.

3
$A = \mathbb{R} \qquad f_n(x) = x \arctan(nx)$
Une troisième méthode : Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad | f_n(x) - x\frac{\pi}{2} | < \frac{1}{n}.$$

En déduire en utilisant 3.2 que $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} \leq \frac{1}{n}$, puis que la suite numérique $(\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}})$ tend vers 0 et donc que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Ecriture quantifiée
(f_n) converge uniformément vers l'application f sur A s'écrit :

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_{\varepsilon,A}{}^{a} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \big(N_{\varepsilon,A} < n \quad \Rightarrow \quad \| f_n - f \|_\infty < \varepsilon\big)$

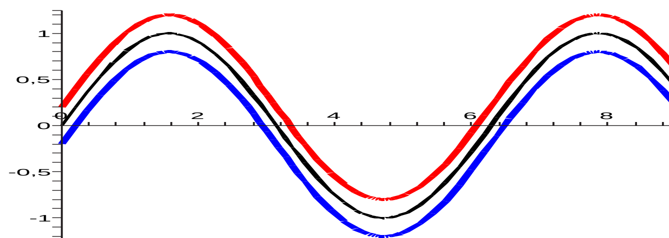


FIG. 3.1 – $\| f_n - f \|_\infty < \varepsilon$

Remarque

[3] $N_{\varepsilon,A}$ne dépend que de A

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Les fonctions telles que $\|f - f\|_\infty < \varepsilon$ sont les fonctions dont le graphe est dans le « tube »de rayon ε centré sur le graphe de f.
Nous utiliserons ces propriétés de l'application qui à f associe $\|f\|_\infty$ et qui caractérisent la notion générale de norme que nous définirons dans le chapitre « espaces vectoriels normés ».

Théorème 3.3.

Soient f et g des applications bornées de A dans $\mathbb{K}$ et λ un élément de $\mathbb{K}$.

$$\|f\|_\infty = 0 \quad \Leftrightarrow f = 0 \qquad \|\lambda f\|_\infty = \mid \lambda \mid \|f\|_\infty \qquad \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

3.1.2.5 Propriétés

3.1.2.6 Propriétés algébriques

Théorème 3.4.

L'ensemble des suites d'applications simplement convergentes sur A forment un sous-anneau de l'anneau des suites d'applications de A dans $\mathbb{K}$: si les suites (f_n) et (g_n) convergent simplement sur A, il en est de même de $\lambda f_n + g_n$ et de $f_n g_n$, et :

$$\lim_{n\to+\infty}(f_n + g_n) = \lim_{n\to+\infty} f_n + \lim_{n\to+\infty} g_n \qquad \lim_{n\to+\infty}(f_n g_n) = \lim_{n\to+\infty} f_n \lim_{n\to+\infty} g_n$$

L'ensemble des suites d'applications uniformément convergentes sur A forme un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites d'applications de A dans $\mathbb{K}$: si les suites (f_n) et (g_n) convergent uniformément alors la suite $(\lambda f_n + g_n)$ converge uniformément sur A vers $(\lambda f + g)$.

Exemple 3.1.1. :
Vérifier que la suite d'applications (f_n) définie par

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{1}{n} & \text{si} \quad 2n-1 \leq x \leq 2n+1 \\ f_n(x) = 0 & \text{si} \quad x < 2n-1 \quad \text{ou} \quad 2n+1 < x \end{cases}$$

converge uniformément vers l'application nulle sur $\mathbb{R}$.
Vérifier que la suite $(xf_n(x))$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

3.1.2.7 Propriétés de la limite d'une suite d'applications convergente

3.1.2.8 Limite d'une suite d'applications bornées

Théorème 3.5. *Limite uniforme d'applications bornées.*

La limite uniforme sur A d'une suite d'applications bornées sur A est une application bornée sur A.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

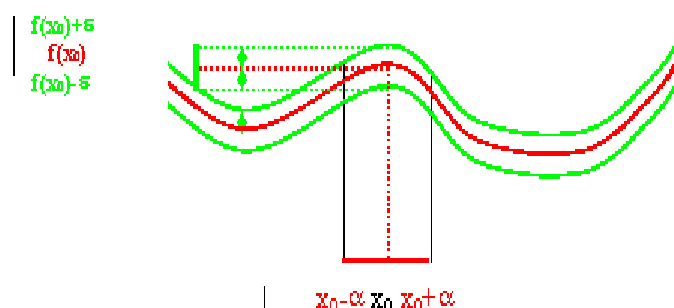
Exemple 3.1.2. :
La limite simple d'applications bornées sur A n'est pas nécessairement bornée sur A :
$A =]0, +\infty[$ $0 < x < n$, $f_n(x) = x$ et pour $n \leq x$, $f_n(x) = n^2 x^{-1}$

3.1.2.9 Limite d'une suite d'applications continues

Théorème 3.6. *limite uniforme d'une suite d'applications continues*

1. *Soit A un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, la limite uniforme sur A d'une suite d'applications continues au point x_0 de A est une application continue au point x_0 de A.*
2. *La limite uniforme sur A d'une suite d'applications continues sur A est une application continue sur A.*

démonstration. : Soit x_0 un élément quelconque de A fixé, montrons que f est



continue au point x_0... □
Critère de non convergence uniforme :
Si une suite (f_n) d'applications continues en un point x_0 de A converge vers une application f qui n'est pas continue en x_0, alors la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur A.

Exemple 3.1.3. Montrer que la suite (f_n) définie par $f_n(x) = \arctan(nx)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$. Ce critère permet-il de montrer la non convergence uniforme de (f_n) sur $]0, +\infty[$?

3.1.2.10 Intégrale de la limite d'une suite d'applications

A $\subset \mathbb{R}$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Théorème 3.7. *intégrale de la limite et limite des intégrales* [1]

Soit $[a, b]^a$ *un segment de* $\mathbb{R}$ *d'extrémités* a *et* b *et* c *un point de ce segment. Si une suite* (f_n) *d'applications, continues sur* $[a, b]$*, converge uniformément sur* $[a, b]$*, alors la suite des primitivés* (F_n) *définies par* $F_n(x) = \int_c^x f_n(t)dt$ *converge uniformément sur* $[a, b]$ *vers l'application* F *qui à* $x \in [a, b]$*, associe* $F(x) = \int_a^x \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t)dt$

[a] nous ne supposons pas nécessairement $a < b$

démonstration. en cours □

Conséquence.
A fortiori la suite $(x \to \int_a^x f_n(t)dt)$ converge simplement ce qui signifie :

$$\forall x \in [a, b] \qquad \int_a^x \lim_{n \to +\infty} f_n(t)dt = \lim_{n \to +\infty} \int_a^x f_n(t)dt$$

En particulier si $x = b$, nous obtenons la règle d'interversion

Théorème 3.8. *règle d'interversion des signes* $\int_a^b$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty}$

Si les applications f_n *sont continues sur* $[a, b]$ *et si la suite* (f_n) *converge uniformément sur* $[a, b]$*, la suite numérique* $(\int_a^b f_n(t)dt)$ *converge et*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(t)dt$$

faux avec la convergence simple !
En voici un exemple avec $[a, b] = [0, 1]$ et la suite d'applications (f_n) définie pour $1 < n$ par $f_n(x) = (n + 1)^2 x^n (1 - x)$.
Vérifier que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
Montrer que $\int_0^1 f_n(x)dx = \dfrac{n+1}{n+2} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1$
faux pour des intégrales impropres !
En voici un exemple avec $[a, b] = [0, +\infty[$ et f_n continue, nulle en dehors de $]n, 3n[$, affine sur $[n, 2n]$ et sur $[2n, 3n]$ et qui vaut $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ en $2n$
Vérifier que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers la fonction

[1] Vous aborderez plus tard d'autres théorèmes de passage à la limite : les théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée, comme points de départ de l'approche théorique de l'intégration choisie

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

nulle.
Vérifier que la suite numérique $\int_1^{+\infty} f_n(t)dt$ vaut $\sqrt{n}$ et conclure.

3.1.2.11 Dérivabilité de la limite d'une suite d'applications dérivables

Exemple 3.1.4. : La limite uniforme d'applications dérivables n'est pas nécessairement dérivable comme le montre l'étude de la suite (f_n) définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x \arctan(nx)$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers l'application non dérivable $f(x) = \frac{\pi}{2}|x|$ [1]

Théorème 3.9. *convergence uniforme des applications dérivées*

Si une suite (f_n) d'applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifie

1. *La suite numérique $(f_n(x))$ converge en au moins un point x_0 de I.*
2. *Ces applications sont de classe $\mathcal{C}^1$.*
3. *La suite des applications dérivées (f'_n) converge uniformément sur I.*

Alors la suite d'application (f_n) converge simplement vers une limite f dérivable sur I et $f' = \lim f'_n$.
De plus cette limite est uniforme sur tout segment inclus dans I.

démonstration. en cours □

règle d'interversion des signes $\frac{d}{dx}$ ou $'$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}$
La conclusion entraîne en particulier :

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to+\infty} (f'_n)$$

faux si la suite (f_n) converge uniformément sur I
$I = \mathbb{R}$ et $f_n(x) = xarctan(nx)$. Nous avons montré que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f avec $f(x) = \frac{\pi}{2}|x|$. Vérifier que les applications f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et que f n'est pas dérivable en 0.

[1] La théorie des distributions propose un cadre théorique où si une suite (T_n) de distributions converge vers T alors la suite DT_n des dérivées converge vers DT.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

3.1.3 Séries d'applications

On se donne (f_n), une suite d'applications d'un sous-ensemble B de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et B un sous-ensemble de A.

3.1.3.1 Définition de la convergence simple

Definition 3.6. *série d'applications*

La suite d'applications (f_n) de A dans $\mathbb{K}$ permet de définir une nouvelle suite d'applications (S_n) de A dans $\mathbb{K}$, appelée la suite des sommes partielles, de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{p=0}^{p=n} f_p$$

Par définition,[a] la ***nature de la série d'applications*** *de terme général f_n, notée $\sum f_n$ ou $\sum_{n \geq 0} f_n$, est celle de la suite (S_n). En particulier si la suite d'applications (S_n) converge simplement sur A vers l'application S, on dit que* ***la série d'applications $\sum f_n$ converge simplement*** *vers S sur A. L'application S est appelée la somme de la série $\sum f_n$ et notée*

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} f_n.$$

.

[a] On adoptera les mêmes définitions pour une série d'applications définie à partir d'un certain rang n_0

Conséquence :
En pratique la série d'applications $\sum f_n$ converge simplement sur A si, pour tout z élément de A, la série numérique $\sum f_n(z)$, qui dépend du paramètre z, converge.

Dans ce cas la valeur en z de $\sum_{n=0}^{n=+\infty} f_n$ est la somme de la série numérique $\sum f_n(z)$

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} f_n(z) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} f_n(z)$$

L'ensemble de tous les points z de B tels que la série numérique $\sum f_n(z)$ converge est parfois appelé le **domaine de convergence simple** de la série d'applications $\sum f_n$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exemple de référence 3.1.

$f_n(z) = z^n$. Déterminer le domaine de convergence simple, D_1, de la série d'applications $\sum f_n$ et calculer sa somme sur D_1.
La série numérique $\sum f_n(z) = \sum z^n$, où z est un nombre complexe fixé, est une série géométrique de raison z qui converge si et seulement si $|z|$ est strictement inférieur à 1. D'où $D_1 = \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$.
La somme

$$z \in D_1, \qquad \sum_{n=0}^{n=+\infty} f_n(z) = \frac{1}{1-z}$$

Exemple 3.1.5. :
Déterminer le domaine de convergence simple de la série d'applications $\sum f_n$ où :

$$1 \leq n \qquad f_n(x) = \frac{1}{|x| + n^2}.$$

x étant un réel fixé, $\sum \frac{1}{|x| + n^2}$ est une série numérique à termes réels positifs. Nous pouvons utiliser les règles de comparaison en termes d'ordre $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$. La série de Riemann d'exposant 2, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc la série $\sum f_n(x)$ converge.
Le domaine de convergence simple D de cette série d'applications est $\mathbb{R}$.

Exemple 3.1.6. :
Déterminer le domaine de convergence simple de la série d'applications $\sum f_n$, $1 \leq n$ où :

$$f_n(x) = \frac{1}{|x| + n}.$$

x étant un réel fixé,$\sum \frac{1}{|x| + n^2}$ est une série numérique à termes réels positifs. Nous pouvons utiliser les règles de comparaison en termes d'équivalents $|f_n(x)| \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. La série harmonique, $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc la série $\sum f_n(x)$ diverge.
Le domaine de convergence simple D de cette série d'applications est $\emptyset$.

Exemple 3.1.7. :
Déterminer le domaine de convergence simple de la série d'applications $\sum f_n$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

où :

$$1 \leq n \qquad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^2+n}.$$

x étant un réel fixé,$\sum \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ est une série numérique qui vérifie le critère des séries alternées puisque $|f_n(x)| = \lambda_n(x)(-1)^n$ où $\lambda_n(x) = \frac{1}{x^2+n}$, la suite $(\lambda_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant, donc la série $\sum f_n(x)$ converge.
Le domaine de convergence simple D de cette série d'applications est $\mathbb{R}$.

Definition 3.7.

Si la série d'applications $\sum f_n$ converge simplement sur A, on peut[a] définir sur A pour tout entier n l'application de A dans $\mathbb{K}$, notée R_n, appelée, ***reste d'ordre n de la série*** *et définie par :*

$$R_n = \sum_{p=n+1}^{p=+\infty} f_p = \lim_{m\to+\infty} \sum_{p=n+1}^{p=m} f_p = \lim_{m\to+\infty} (S_m - S_n) = S - S_n$$

[a]puisque pour tout entier n la série d'applications $\sum_{p\geq n} f_p$ converge

Remarque 3.1.1.
Pour z élément fixé quelconque dans A, la convergence absolue[3] de la série numérique $\sum f_n(z)$ entraîne sa convergence. Or la série numérique $\sum |f_n(z)|$ est associée à la série d'applications $\sum |f_n|$.

Definition 3.8.

On dit que ***la série d'applications converge absolument sur A*** *si la série d'applications $\sum |f_n|$ converge simplement sur A.*

Théorème 3.10. *convergence absolue entraîne convergence simple*

La convergence simple sur A de la série d'applications $\sum |f_n|$ entraîne celle de la série d'applications $\sum f_n$.

[3]Rappel : la convergence absolue d'une série numérique est plus simple à étudier que sa convergence simple puisqu'on dispose alors des outils propres à l'étude des séries à termes positifs

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exemple 3.1.8. :

Montrer que la série d'applications $\sum f_n$ où $f_n(x) = \dfrac{e^{inx}}{x^2+n^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

3.1.3.2 Définition de la convergence uniforme

3.1.3.3 Définition

Definition 3.9.

La série d'applications $\sum f_n$ ***converge uniformément sur*** A *si la suite* (S_n) *des applications sommes partielles de la série* $\sum f_n$ *converge uniformément sur* A. *En conséquence, si* $\sum f_n$ *converge simplement sur* A, $\sum f_n$ *converge uniformément sur* A *signifie que la suite des restes d'ordre* n, (R_n), *est bornée et converge uniformément vers l'application nulle sur* A.

Exemple de référence 3.2. *cas des séries géométriques :*

$A =]-1,1[$, $f_n(x) = x^n$, *étude de* $\sum f_n \; 1 \leq n$

n *entier fixé, on connaît l'expression du reste d'ordre* n : $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$. *Lorsque* x *tend vers* 1 *par valeurs inférieures,* $R_n(x)$ *tend vers* $+\infty$, *d'où* R_n *n'est pas borné sur* $]-1,1[$. *Donc* $\sum f_n$ *ne converge pas uniformément sur* A.

Théorème 3.11.

La convergence uniforme sur A *de la série d'applications* $\sum f_n$ *entraîne la convergence uniforme sur* A *de la suite* (f_n) *vers l'application nulle.*

démonstration. en cours □

Remarquer que, la réciproque de cette implication est fausse comme pour les séries numériques : (a_n) *converge vers* 0 *n'entraîne pas que la série* $\sum a_n$ *converge.*

Exemple 3.1.9. :

Vérifier que série d'applications $\sum f_n$ où $1 \leq n$, $f_n(x) = \frac{x}{n}$ ne converge pas simplement sur $[0,1]$ alors que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

Exemple 3.1.10. :

Vérifier, en utilisant un raisonnement par contraposée, que la série géométrique $\sum f_n$ de l'exemple de référence (3.1), où $f_n(z) = z^n$, ne converge pas uniformément sur $D_1 = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exemple 3.1.11. On a donc un critère de non convergence uniforme :
$A = \mathbb{R}$ $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^2 + x^2}$ Converge uniforme de $\sum f_n$?
Soit n un entier fixé quelconque $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 1$ donc $1 \leq \|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}}$.

3.1.3.4 Convergence uniforme des séries alternées

Retenez le théorème suivant mais cultivez sa démonstration. Ce théorème ne doit pas être une "boîte noire".

Théorème 3.12. ***convergence uniforme des séries alternées***

Si la convergence simple sur A de la série d'applications $\sum f_n$ est obtenue par le critère des séries alternées [a] alors $|R_n| \leq |f_{n+1}|$ et la série d'applications $\sum f_n$ converge uniformément sur A dès que la suite (f_n) converge uniformément sur A vers l'application nulle.

[a] pour tout x de A, la série numérique $\sum f_n(x)$ est une série alternée qui converge par le théorème des séries alternées, c'est à dire si $(|f_n(x)|)$ est une suite qui tend vers 0 et qui est décroissante.

démonstration. Le reste d'ordre n, R_n, vérifie : $\|R_n\|_\infty \leq \|f_{n+1}\|_\infty$ □

Exemple 3.1.12.

Vérifier que la série $\sum f_n$, de l'exemple (3.1.7) où $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^2 + n}$, converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

type de rédaction conseillé :
Convergence simple sur $\mathbb{R}$

Soit x un réel quelconque fixé, la série de terme général $\sum \dfrac{(-1)^n}{x^2 + n}$ est alternée.
De plus :

$$(1) \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{x^2 + n} = 0 \quad \text{et (2)} \quad \frac{1}{x^2 + n + 1} \leq \frac{1}{x^2 + n}$$

Cette série numérique converge d'après le théorème des séries numériques alternées (2.16). Nous savons que de plus le reste d'ordre n vérifie :

$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)|. \tag{3.3}$$

En conclusion la série d'applications $\sum f_n$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$.
Convergence uniforme sur $\mathbb{R}$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Soit n un entier quelconque fixé, selon (3.3), $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)|$, or l'application $f_{n+1} : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+n+1}$ prend sa valeur maximale en valeur absolue en 0, et $\|f_{n+1}\|_\infty = f_{n+1}(0) = \dfrac{1}{n+1}$, en conséquence :

$$\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}$$

La suite numérique $(\|R_n\|_\infty)$ converge vers 0, la suite d'applications (R_n) converge uniformément vers l'application nulle sur $\mathbb{R}$. Il en est donc de même de la série d'applications $\sum f_n$.

3.1.3.5 Convergence normale d'une série d'applications

Definition 3.10.

La série d'applications $\sum f_n$ converge normalement sur A *si les applications (f_n) sont bornées*[a] *sur A et si la série numérique $\sum \| f_n \|_\infty^A$ converge.*

[a] Il suffit de supposer les applications (f_n) bornées à partir d'un certain rang

Théorème 3.13. *la convergence normale entraîne la convergence uniforme*

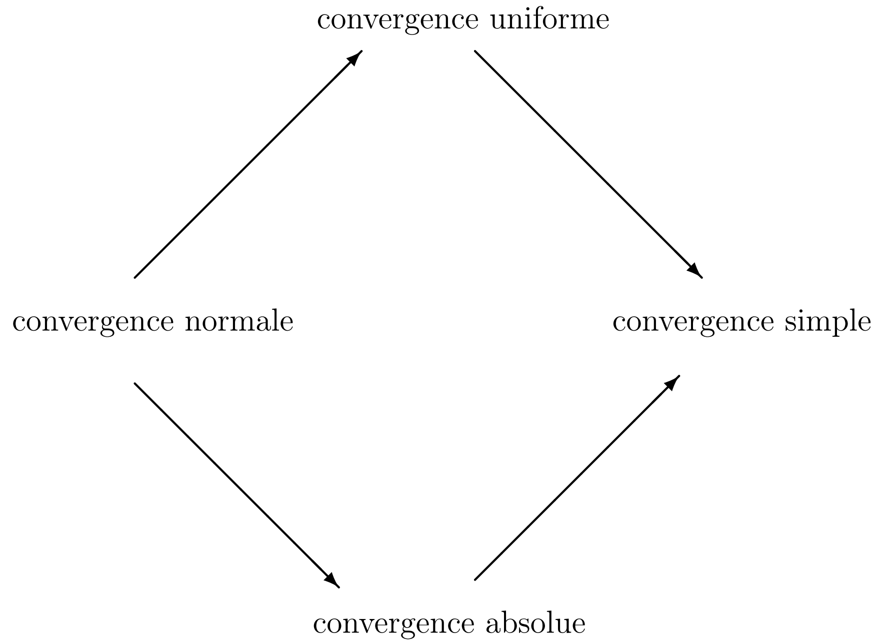
La convergence normale sur A d'une série d'applications $\sum f_n$ entraîne la convergence uniforme et la convergence absolue de $\sum f_n$ sur A.

démonstration. Le reste d'ordre n, R_n, vérifie :

$$\| R_n(x) \|_\infty^A \leq r_n$$

où r_n est le reste d'ordre n de la série numérique de terme général $c_k = \| f_k \|_\infty^A$
□

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.



Exemple 3.1.13.
$A = [-R, R]$ où R est un réel donné $0 < R < 1$ et $f_n(x) = x^n$. Vérifier que $\sum f_n$ converge normalement sur A

solution :
n fixé $\|f_n\|_\infty^A = R^n$
$\sum \|f_n\|_\infty^A$ est une série géométrique convergente ce qui signifie que $\sum f_n$ converge normalement sur A.
On en déduit que $\sum f_n$ converge uniformément sur A.

Exemple 3.1.14.
$A = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| \leq R\}$ où R est un réel quelconque donné et où $f_n(z) = \dfrac{z^n}{n!}$.
Vérifier que $\sum f_n$ converge normalement sur A

solution :
n fixé $\|f_n\|_\infty^A = \dfrac{R^n}{n!}$
$\sum \|f_n\|_\infty^A$ est une série numérique convergente ce qui signifie que $\sum f_n$ converge normalement sur A.
On en déduit que $\sum f_n$ converge uniformément sur A, de plus selon (2.15)

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} f_n(z) = e^z \qquad \forall z \in A$$

.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exemple 3.1.15.
La convergence uniforme n'entraîne pas la convergence normale
L'exemple étudié en (3.1.12) où $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^2+n}$, est un cas où la série d'applications converge uniformément sur $\mathbb{R}$, sans converger normalement puisque $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n}$, donc la série $\sum \|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}}$ diverge.

Exemple 3.1.16.
$A = \mathbb{R}$ et $1 \leq n \quad f_n(x) = \dfrac{1}{(x\sin x)^2 + n^2}$

• Soit n un entier fixé $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} \leq \dfrac{1}{n^2}$.

• $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, par comparaison en terme d'ordre $\sum \|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}}$ converge, et la série d'applications $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3.1.17.

$A = [0, +\infty[$ et $g_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{n+x}$.

• Etant donné un entier n : $\forall x \in \mathbb{R} \quad nx \leq e^{nx} \quad \Rightarrow \quad e^{-nx} \leq \dfrac{1}{nx}$

$e^{-nx} \leq \dfrac{1}{nx} \Rightarrow xe^{-nx} \leq \dfrac{1}{n}$ et $g_n(x) \leq \dfrac{1}{n^2}$.

En conséquence $\|g_n\|_\infty^{\mathbb{R}} \leq \dfrac{1}{n^2}$.

• La série numérique à termes réels positifs $\sum \|g_n\|_\infty^{\mathbb{R}}$ converge d'après le théorème de comparaison en termes d'ordre, et la série d'applications $\sum g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
Retenez l'idée du théorème suivant car c'est une idée importante. Cependant n'oubliez pas sa démonstration. Ce théorème ne doit pas être une "boîte noire".

Théorème 3.14. *majoration uniforme par une série numérique convergente*

S'il existe une série numérique convergente $\sum a_n$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in A \quad |f_n(x)| \leq a_n$$

alors la série $\sum f_n$ converge normalement sur A.

Les théorèmes qui suivent sont les analogues des théorèmes établies précédemment pour les suites de fonctions.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

3.1.3.6 Propriétés

Théorème 3.15. *conservation de la continuité par convergence uniforme*

Si chacune des applications f_n est continue sur A et si la série d'applications $\sum f_n$ converge uniformément sur A alors la somme $\sum_{n=0}^{n=+\infty} f_n$ est une application continue sur A.

démonstration. en cours □

Exemple 3.1.18. :
$f_n(x) = x(1-x)^n$, la série $\sum f_n$ d'applications ne converge pas uniformément sur $A = [0, 1]$
En effet vérifier que la somme de cette série vaut 0 en 0 et 1 sur $]0, 1[$. Remarquer que cependant la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur A.

Théorème 3.16. *interversion des signes $\sum$ et $\int$.*

Si chacune des applications f_n est continue sur le segment d'extrémités a et b, noté $[a, b]$ et si la série d'applications $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors la série numérique $\sum \int_a^b f_n(t)dt$ converge et [a] *:*

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{n=+\infty} f_n\Big)(t)dt$$

[a] a pour somme ce que l'on attend

démonstration. Ce théorème se déduit du théorème qui suit □

Théorème 3.17. *intégration terme à terme*

Si chacune des applications f_n est continue sur le segment $[a, b]$ et si la série d'applications $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ alors la série d'applications $\sum F_n$, où c est un point du segment $[a, b]$ et où $F_n(x) = \int_c^x f_n(t)dt)$, converge uniformément sur $[a, b]$ et :

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} \int_c^x f_n(t)dt = \int_c^x \Big(\sum_{n=0}^{n=+\infty} f_n\Big)(t)dt)$$

démonstration. en cours □

Remarque 3.1.2.
La convergence uniforme est une condition suffisante mais non nécessaire pour que l'on puisse intégrer terme à terme.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exemple 3.1.19.

Etude de la série numérique de terme général $u_n = \dfrac{1}{n!}\int_1^A (\ln t)^n dt$ où $n \geq 0$.

Théorème 3.18. *interversion des signes* $\dfrac{d}{dx}$ *et* $\sum$ *:*

Si chacune des applications f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et si les deux conditions de convergence suivantes sont réalisées :
1 La série $\sum f_n$ converge simplement sur I
2 La série des applications dérivées (f_n') converge uniformément sur I.
Alors la somme de la série $\sum f_n$ est dérivable et :

$$\frac{d}{dx}\Big(\sum_{n=0}^{n=+\infty} f_n\Big) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{d}{dx} f_n$$

Ce théorème se déduit immédiatement du résultat plus précis suivant :

Théorème 3.19. *dérivation terme à terme*

Si A est un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $\sum f_n$ une suite d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions de convergence suivantes :
1 La série numérique $\sum f_n(x)$ converge en au moins un point x_0 de I.
3 La série des applications dérivées (f_n') converge uniformément sur I.
alors la somme de la série $\sum f_n$ est dérivable sur I et

$$\Big(\sum_{n=0}^{n=+\infty} f_n\Big)' = \sum_{n=0}^{n=+\infty} f_n'$$

de plus la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I.

démonstration. en cours □

Attention

La convergence uniforme de la série $\sum f_n$ ne permet pas de déduire la convergence de la série $\sum f_n'$.

Exemple 3.1.20.

Montrer que la série de terme général $f_n(x) = 2^{-n}\sin(3^n x)$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ et que cependant la série des dérivées ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$. On pourra montrer qu'elle ne converge pas en 0. En effet $f_n'(0) = \dfrac{3^n}{2^n}$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

3.1.3.7 Critères de Cauchy

Le critère de Cauchy est un outil théorique essentiel utilisé pour étudier la convergence simple d'une suite d'applications lorsque on ne connaît pas à priori la limite. Il est nécessaire pour établir le précédent théorème d'interversion de limites.

Proposition 9 (critère de Cauchy de la convergence simple). *La suite d'applications (f_n) converge simplement vers une application f si pour tout élément x de A la suite numérique $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy, ce qui s'écrit :*

$$\forall x \in A, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_{\varepsilon,x} \quad / \quad \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 \quad \big(N_{\varepsilon,x} < n \quad et \quad N_{\varepsilon,x} < m$$
$$\Rightarrow \quad | \, f_n(x) - f_m(x) \, | \quad < \quad \varepsilon \big)$$

Remarque 3.1.3.
Les objets que l'on veut rendre proches sont des nombres réels ou complexes $f_n(x)$ et $f_m(x)$. La condition est exprimée à l'aide de la distance usuelle entre ces nombres $|f_n(x) - f_m(x)|$

Théorème 3.20. *critère de Cauchy de la convergence uniforme*

La suite d'applications (f_n) converge uniformément sur A s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \quad / \quad \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \quad \big(N_\varepsilon < n \quad et \quad N_\varepsilon < m$$
$$\Rightarrow f_n - f_m \in \mathcal{B}(A,K) \quad et \quad \| \, f_n - f_m \, \|_\infty \quad < \quad \varepsilon \big)$$

Remarque 3.1.4.
Les objets que l'on veut rendre proches sont des applications g et f. La condition est exprimée avec une distance entre les applications g et f donnée ici par la norme infinie de $\|g - f\|_\infty$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

3.1.4 Annexe 1 : limite et somme d'une série d'applications

Ce théorème généralise le théorème sur la continuité.

Théorème 3.21. *interversion des limites*

Soit x_0 un point de l'adhérence de A[a] tel que chaque application f_n a une limite (l_n) en x_0.
Si la suite (f_n) converge uniformément sur A, alors :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ A}} \lim_{n=+\infty} f_n(x) = \lim_{n=+\infty} (\lim_{\substack{x \to x_0 \\ A}} f_n(x))$$

Ce qui signifie que la suite numérique (l_n) converge et que l'application $\lim_{n=+\infty} f_n$ a une limite en x_0 égale à $\lim_{n=+\infty} l_n$.

Si la série d'applications $\sum f_n$ converge uniformément sur A alors :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ A}} (\sum_{n=0}^{n=+\infty} f_n(x)) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} (\lim_{\substack{x \to x_0 \\ A}} f_n(x))$$

Ce qui signifie que la série numérique $(\sum l_n)$ converge et que l'application $\sum_{n=0}^{n=+\infty} f_n$ a une limite en x_0 égale à $\sum_{n=0}^{n=+\infty} l_n$.

[a] imaginer que x_0 est fini ou non et est l'extrémité d'un intervalle ouvert inclus dans A

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

3.1.5 Annexe 2 : convergence uniforme et théorème d'Abel

Ce théorème généralise le théorème de convergence uniforme des séries alternées.

Théorème 3.22. ***convergence uniforme des "séries d'Abel"***

Si pour tout x de A la série numérique $\sum f_n(x)$ converge par le critère d'Abel, c'est à dire si pour tout x élément fixé de A

$$f_n(x) = \lambda_n(x) v_n(x) \text{ avec}$$

1. *$(\lambda_n)(x) \in \mathbb{R}^+$ est une suite décroissante à valeurs positives qui tend vers 0 et*
2. *$\exists M_x \quad / \quad \forall n \in \mathbb{N}, |\sum_{p=0}^{p=n} v_p(x) | \leq M_x$.*
et si de plus :
1'. *la suite d'applications (λ_n) converge uniformément sur A vers 0.*
2'. *il existe un réel M ne dépendant que de A tel que, pour tout élément x de A[a], on ait :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad | M_x | \leq M$$

alors le reste d'ordre n, R_n, vérifie :

$$\forall x \in A \quad | R_n(x) | \quad \leq \quad 2M \mid \lambda_n(x) | \leq 2M \|\lambda_n\|_\infty$$

et

$$0 \leq \|R_n\|_\infty \leq 2M \|\lambda_n\|_\infty.$$

*En particulier la série $\sum f_n$ converge **uniformément** sur A.*

[a] les sommes partielles de la série d'applications $\sum v_n$ sont uniformément bornèes

Corollaire 2. *série de terme général $f_n(x) = \lambda_n e^{inx}$*
Si (λ_n) est une suite numérique décroissante qui tend vers 0, la série d'applications $\sum f_n$ définie par $f_n(x) = \lambda_n e^{inx}$ est uniformément convergente sur tout intervalle I_α de la forme $I_\alpha = [2\alpha, 2\pi - 2\alpha]$ avec $\alpha \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$

Exemple 3.1.21. :
$\lambda_n(x) = \dfrac{1}{n+1}$, $v_n(x) = e^{inx}$

démonstration.
1 Pour x fixé dans I_α nous pouvons appliquer le théorème d'Abel :

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

• (λ_n) est une suite décroissante qui tend vers 0.

• Montrer $\forall n \in N \quad V_n(x) \leq M_x$ où $M_x = \dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}$

$\sum f_n(x)$ converge et le reste d'ordre n vérifie $|R_n(x)| \leq 2\lambda_n M_x$

1 Si $x \in I_\alpha$ alors

• $\lambda_n = \dfrac{1}{n+1}$ est indépendant de x

• $\alpha \leq \dfrac{x}{2} \leq \pi - \alpha$ et $\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} \leq M$ où $M = \dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}$

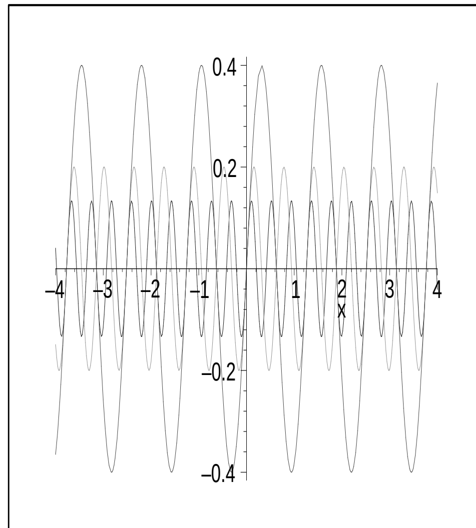
$0 \leq \|R_n\|_\infty^{I_\alpha} \leq \dfrac{2}{n+1}M$

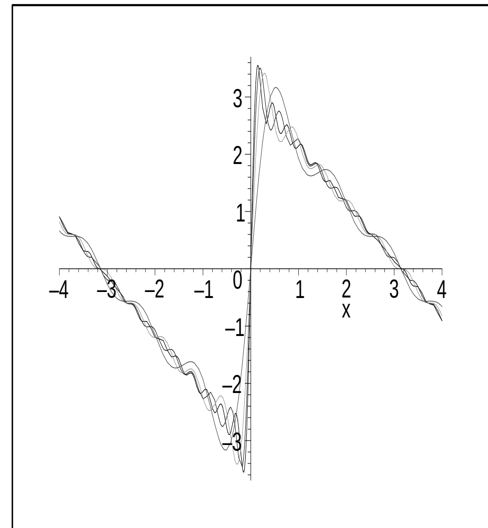
Donc la suite numérique $(\|R_n\|_\infty^{I_\alpha})$ tend vers 0, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I_α □

Noter que (λ_n) est nécessairement une suite d'applications à valeurs réelles positives et en particulier que le théorème d'Abel uniforme permet de montrer la convergence uniforme des séries alternées avec $M = 1$. Cependant la majoration donnée par le théorème des séries numériques alternées donne directement une meilleure majoration.

Exercice 3.1. 1. Déterminer le domaine de convergence puis le domaine de continuité de la somme pour la série d'applications

$$f_p(x) = \sum_{p \in \mathbb{N}^*} 2\frac{\sin(p\omega x)}{p}$$





© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

représentation des applications f_1 f_2 f_2[a]

[a] noter les relations entre les périodes et les fréquences des applications f_p

représentation des sommes partielles d'ordre 2, 5, 10

2. Etudier la convergence et la continuité de la somme de la série d'applications de terme général :

$$f_p(x) = 2\frac{(-1)^p}{p}\sin(px)$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

3.1.6 Annexe 3 : convergence uniforme sur tout segment.

Le raisonnement qui suit apparaît dans de nombreux exercices même si la notion de convergence sur tout compact n'est pas au programme.

Proposition 10.

1. *Si une suite d'applications (f_n) converge simplement (resp. uniformément) sur A_1 et sur A_2 alors elle converge simplement (resp. uniformément) sur $A_1 \bigcup A_2$.*
2. *Si une suite d'applications (f_n) converge simplement sur les sous-ensembles A_p, $p \in \mathbb{N}$ alors elle converge simplement sur $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p$ Cette propriété est fausse pour la convergence uniforme*

démonstration. en cours □

Exemple 3.1.22. La suite (f_n) où $f_n(x) = x^n$ converge uniformément sur $A_p = [0, 1 - \frac{1}{p}]$ si $p \in \mathbb{N}^*$ sans converger uniformément sur $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p = [0, 1[$

Exemple 3.1.23. : $I =]0, +\infty[$, $f_n(x) = \arctan(nx)$
(f_n) ne converge pas uniformément sur I mais (f_n) converge uniformément sur $A_p = [p^{-1}, +\infty[$ où $p \in \mathbb{N}^*$ et en particulier sur tout segment $[\alpha, \beta]$ inclus dans I.
On veut montrer que la limite f de (f_n) est continue sur I.

démonstration. Soit x_0 un élément de $]0, +\infty[$ il existe $\alpha = \frac{x_0}{2}$ et $\beta = 2x_0$ tels que $0 < \alpha < x_0 < \beta$ donc le segment $[\alpha, \beta]$ contient x_0 et est inclus dans $]0, +\infty[$. Par hypothèse la suite (f_n) converge uniformément sur le segment $[\alpha, \beta]$ de $]0, +\infty[$ vers f, les applications f_n étant continues sur $]0, +\infty[$, elles sont continues en x_0 donc la restriction de f à $[\alpha, \beta]$ est continue en x_0 et f est continue en x_0. Ceci est vrai pour x_0 élément quelconque de $]0, +\infty[$ donc f est continue sur $]0, +\infty[$ □

Exercice 3.2.
(**) Si (f_n) est une suite d'applications croissantes et continues définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement sur $[0, 1]$ vers une application f continue, montrer[a] que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon{}^{b} / \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad / \quad N_\varepsilon < n, \quad \forall x \in [0, 1] \quad | f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$$

[a] Ce n'est pas le théorème de Dini
[b] indépendant de x

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exercice 3.3.

Montrer que si une suite d'applications (f_n) continues sur $\overline{A}$, converge uniformément sur A alors la suite (f_n) converge uniformément sur $\overline{A}$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

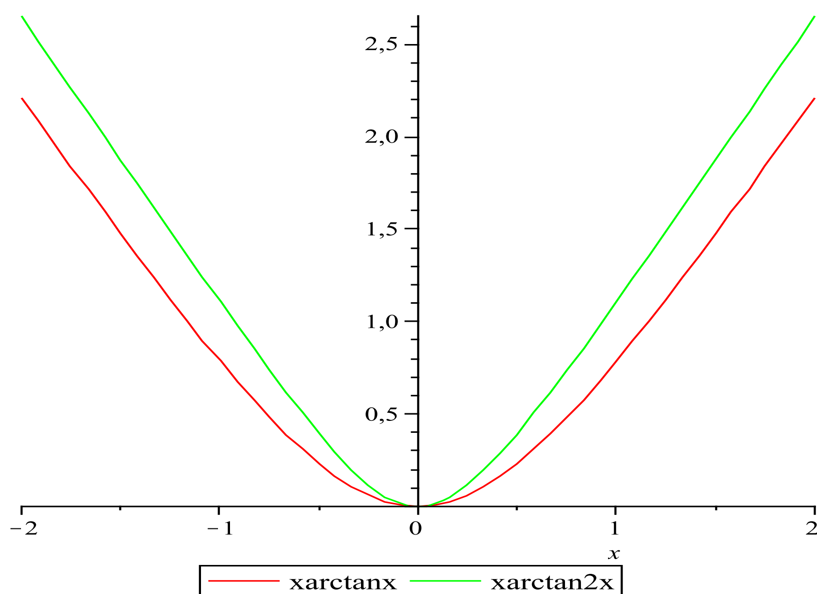
3.2 EXERCICES

3.2.1 Tracés avec Maple

Tracés de suites d'applications

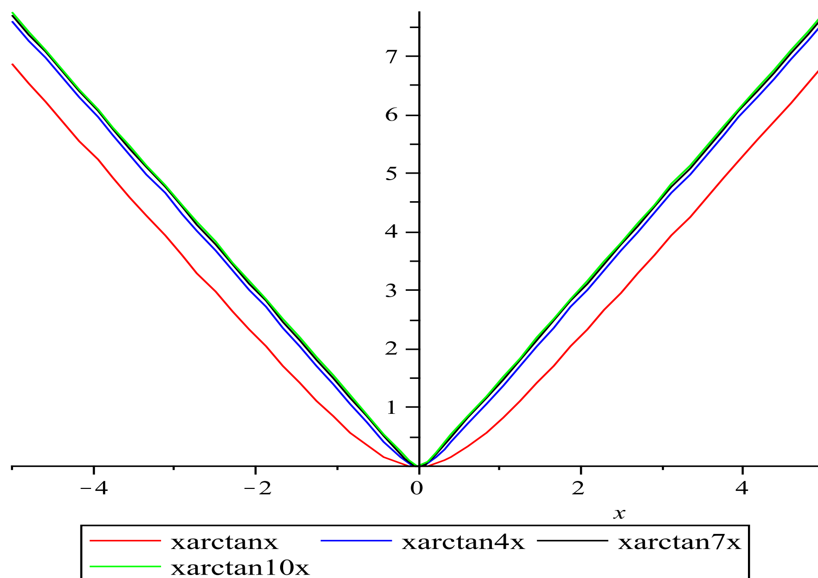
```
> restart :with(plots) : gn :=x->x*arctan(n*x) :
```

```
> plot([seq(evalf(gn(x)),n=1..2)],x=-2..2,                    \
color=[red,green,blue,black],legend=["xarctanx",
"xarctan2x"]);
```




```
> S :=seq(gn(x),n=1..10,3) :
```


© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.



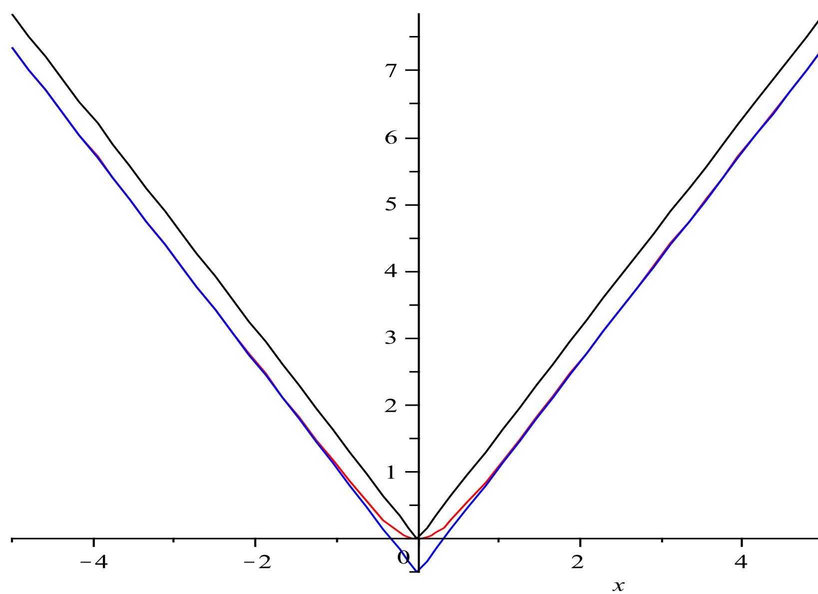
Tracé de la limite g de g_2 et des asymptotes relatives à g_2

```
> g :=x->Pi*abs(x/2) :
```

```
> a2 :=x->piecewise(x<0,-x*Pi/2-1/2,x=0,0,x*Pi/2-1/2) :
```

```
> plot([x*arctan(2*x),g(x),a2(x)],x=-5..5,                    \
colour=[red,black,blue]) ;
```


© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.



© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

3.2.2 Suites de fonctions et convergence simple

3.2.2.1 apprentissage du cours

Exercice 3.4.
$A = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \arctan(nx)$. Donner une construction géométrique simple permettant de déduire la courbe représentative de $x \to \arctan(nx)$ de celle de $x \to \arctan(x)$

Exercice 3.5.
$A = \mathbb{R}$, $g_n(x) = x \arctan(nx)$. Donner la position relative des courbes représentatives que l'on notera (L_n) . Etude des droites asymptotes aux courbes (L_n).

Indications :Utiliser l'égalité $0 < u \quad \arctan(u)+\arctan(\frac{1}{u}) = \frac{\pi}{2}$, pour obtenir un développement limité en $+\infty$ de $\arctan(nx)$.

Exercice 3.6.
Soit (f_n) est une suite d'applications définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et croissantes (resp. strictement croissantes, positives, convexes) sur $\mathbb{R}$ qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f, que peut-on dire de la limite f de (f_n) ?

Exercice 3.7.
Montrer que chacune des suites d'applications (f_n) et (g_n) respectivement définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \arctan(nx)$ et $g_n(x) = x \arctan(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et déterminer la limite de chacune de ces suites.

Exercice 3.8.
Les suites d'applications (f_n) et (g_n) définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$ et $g_n(x) = x^n(1 - x)$ convergent-elles sur $\mathbb{R}$? sur $[0, 1]$?

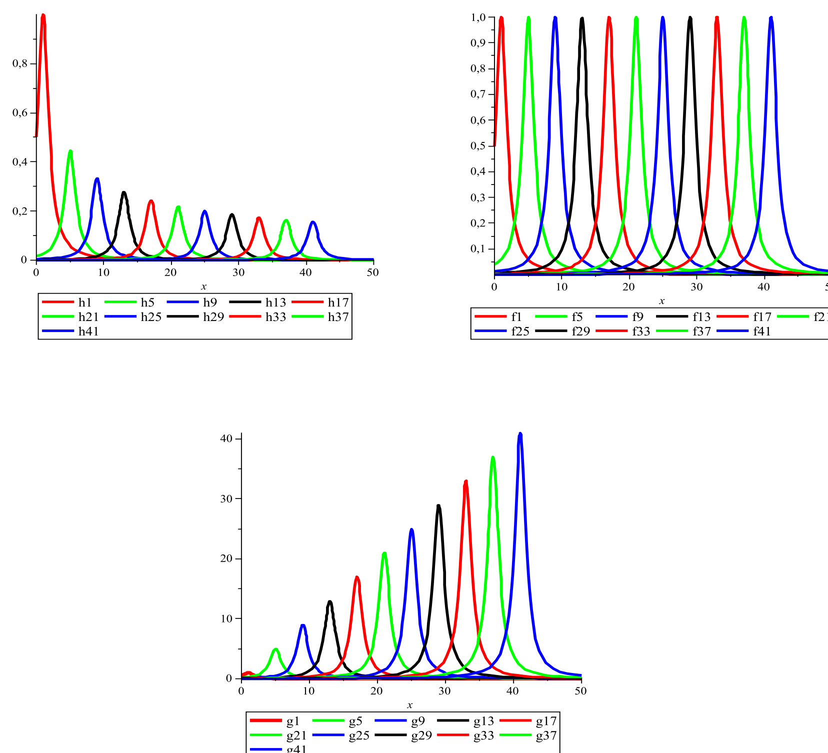
Exercice 3.9.
On se propose d'étudier les suites d'applications (h_n), (g_n) et (f_n) définies par :

$$h_n(x) = \frac{n^{-\frac{1}{2}}}{1 + (x - n)^2}$$
$$g_n(x) = \frac{n}{1 + (x - n)^2}$$
$$f_n(x) = \frac{1}{1 + (x - n)^2}$$

1. Reconnaître parmi les familles de courbes représentées ci-dessous lesquelles représentent les applications (h_n), $n \in \{1, 2, 4, 8\}$, les applications (g_n), $n \in$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$\{1, 2, 4, 8\}$, les applications (f_n), $n \in \{1, 2, 4, 8\}$.
2. Graphiquement pouvez-vous dire si les suites d'applications (h_n), (g_n) et (f_n) convergent ou non ?
3. Etudiez en utilisant la définition donnée la convergence au sens de la convergence simple des suites d'applications (h_n), (g_n) et (f_n).



3.2.2.2 pour aller plus loin

Exercice 3.10. *des bosses et des chapeaux*
1. Soit α un paramètre réel pour tout entier naturel n on considère l'application (k_n) de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $k_n(x) = n^{\alpha} x e^{-nx}$
Montrez que la suite d'applications (k_n) converge simplement vers l'application nulle sur $[0, +\infty[$.
Etudiez en fonction du paramètre réel α les variations sur $[0, +\infty[$ de l'application (k_n) .
Donnez l'allure de la courbe représentative de l'application (k_n).
Comparez le phénomène observé à ceux décrits dans l'exercice précédent.
2.Etudiez sur $\mathbb{R}$ la convergence simple de la suite d'applications (δ_n) de $\mathbb{R}$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

dans $\mathbb{R}$ où δ_n est l'application continue, paire et affine par morceaux qui prend la valeur 1 en 0 et qui s'annule exactement pour l'ensemble des valeurs de x telles que $n^{-1} \leq | x |$.
Imaginez des chapeaux qui glissent.

Exercice 3.11.
Que peut-on dire de la limite simple d'applications (f_n) qui sont positives, qui sont monotones[1], $\cdots$?

Exercice 3.12.
1. Montrez que la suite (k_n) d'applications définies sur $\mathbb{R}$ par : $k_n(x) = \sin(x)\cos^n(x)$ converge simplement sur $A = \mathbb{R}$.

3.2.3 Suites de fonctions-convergence uniforme

3.2.3.1 apprentissage du cours

Exercice 3.13.
Avec $A = \mathbb{R}$, vérifier que pour tout entier n, $\{| h_n(x) | /x \in A\}$ defini dans l'exercice (3.9) a un maximum. Que valent $\| h_n \|_\infty^A$, $\| g_n \|_\infty^A$, $\| f_n \|_\infty^A$?

Exercice 3.14.

1. Si les suites d'applications (f_n) et (g_n) convergent simplement sur A, il en de même de $(\lambda f_n + g_n)$, pour tout élément λ de $\mathbb{K}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda f_n + g_n) = \lambda \lim\limits_{n\to+\infty} f_n + \lim\limits_{n\to+\infty} g_n$? .
2. Si les suites d'applications (f_n) et (g_n) convergent uniformément sur A, la suite d'applications $(\lambda f_n + g_n)$ converge uniformément ?

Exercice 3.15.
$A = \mathbb{R}$. Reprenez l'exercice (3.12) et montrez $\| k_n \|_\infty^A \sim_{n\to+\infty} (ne)^{\frac{1}{2}}$. La suite (k_n) converge-elle uniformément vers l'application nulle sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3.16.
Montrez la convergence uniforme de la suite d'applications (g_n) de l'exercice 3.5 vers la fonction $x \to | \dfrac{\pi x}{2} |$. Etudiez la convergence uniforme de la suite d'applications (f_n) de l'exercice 3.4.

[1]Penser à utiliser "le prolongement des inégalités" par passage à la limite, pour vérifier que ces propriétés sont conservées dès la notion de limite simple.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exercice 3.17.
Les suites (h_n), (f_n) , (g_n) des exercices 3.9 et 3.13convergent-elles uniformément vers l'application nulle sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3.18.
Etudier la convergence uniforme des suites d'applications (k_n) et (δ_n) de l'exercice 3.10

Exercice 3.19.
Soit la suite (f_n) d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(0) = 0$$
$$f_n(x) = n(1 - n|x|) \qquad \text{sur } [-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}]\backslash\{0\}$$
$$f_n(x) = 0 \qquad \text{sur } \mathbb{R}\backslash[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}]$$

Vérifier que cette suite converge simplement vers l'application nulle sur $\mathbb{R}$. Calculer pour x réel quelconque donné et pour ε réel donné strictement positif une valeur de $N_{\varepsilon,x}$ en fonction de ε et de x telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad N_{\varepsilon,x} < n \quad \Rightarrow \quad | f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$$

Cette suite converge-t-elle uniformément ?

Exercice 3.20.
Montrer que indépendamment de la valeur du paramètre entier k la suite d'applications (f_n) où $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1 + n^k x^k}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

3.2.3.2 pour aller plus loin

Exercice 3.21. produit et suites convergentes

1. Montrer que si les suites d'applications (f_n) et (g_n) convergent simplement sur A, il en est de même de la suite $(f_n g_n)$ et $\lim_{n\to+\infty}(f_n + g_n) = \lim_{n\to+\infty} f_n \cdot \lim_{n\to+\infty} g_n$.
2. Le produit de suites uniformément convergentes converge-t-il uniformément ?

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exercice 3.22.
Soit la suite (f_n) d'applications définies sur $[0,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k(1+kx)}$$

Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers une application f.
Calculer $f(0)$.
Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.
Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.(Vous pourrez à ce sujet lire dans la dernière partie de ce cours le théorème 3.21)

Exercice 3.23.
Calculer en effectuant un changement de variable convenable.

$$\int_0^1 n^2x(1-x)^n\,dx$$

On considère la suite d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = n^2x(1-x)^n$$

- Étudier le domaine de convergence simple de la suite de fonctions (f_n)
- Justifier l'existence de

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} n^2x(1-x)^n\,dx$$

- Comparer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 n^2x(1-x)^n\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} n^2x(1-x)^n\,dx$$

Exercice 3.24.
Etudier le domaine de convergence uniforme de la suite d'applications (f_n) définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \prod_{p=1}^{p=n} \cos\dfrac{x}{2^p}$

3.2.4 Séries de fonctions

3.2.4.1 apprentissage du cours

Exercice 3.25.
Etudier les différents types de convergence (simple, absolue,uniforme, normale) de chacune des séries d'applications suivantes :

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

1 $A = \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n^2}$

2 $A = \mathbb{R}$ $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx^2}}{n^2}$, $n \geq 1$

Exercice 3.26.

$A = [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^2 + n}{n^2}$

$A = [0, +\infty[$, $n \in \mathbb{N}$ et $f_n(x) = x^n e^{-n^2 x}$

Exercice 3.27.

$A = [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$ et $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1} e^{-nx}}{\sqrt{n}}$

a Montrer la convergence simple de $\sum f_n$ sur $[0, +\infty[$

b Montrer la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[\alpha, +\infty[$ si $0 < \alpha$

c Etudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$.

d Etudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$.

e Etudier la continuité sur $[0, +\infty[$ de la somme de cette série.

Exercice 3.28.

$A = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{n^3 + x^2}$

a Montrer la convergence absolue de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$

b Etudier la convergence uniforme de f_n sur $\mathbb{R}$

c Etudier la convergence uniforme sur $[-a, a]$ a réel quelconque positif

Exercice 3.29.

On considère la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ d'applications définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}$$

.

- Montrer que cette série d'applications converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que cette série d'applications ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.
- Minorer $\sum_{k=n+1}^{k=2(n+1)} f_k(\dfrac{1}{n+1})$ et achever l'étude de la convergence de cette série d'applications

Exercice 3.30.

On considère la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ d'applications définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + (-1)^n n}$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

.

- Montrer que cette série d'applications converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
- Montrer que cette série d'applications converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout réel a strictement positif.
- Etudier la convergence uniforme de cette série sur $\mathbb{R}^+$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

3.2.5 Un problème : La fonction zêta de Riemann

Nous verrons à la fin du cours sur les séries entières comment on peut prolonger la fonction exponentielle de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$. Ici de même la fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^{k=\infty} \dfrac{1}{n^x}$ peut être prolongée par $(x+iy) \mapsto \sum_{k=0}^{k=\infty} \dfrac{1}{n^{x+iy}}$.
Riemann fait en 1859 la conjecture que tous les zéros de cette fonction autres que -2, -4, -6... ont une partie réelle égale à $1/2$. Cette conjecture a été vérifiée en 1986 pour les 1 500 000 001 premiers zéros de zêta. Personne n'a encore encore démontré que cela est vrai pour tous les zéros. La connaissance des zéros de cette fonction intervient dans la détermination du nombre $\theta(x)$ de nombres premiers inférieurs à x.

On considère les série d'applications $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(g_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x} \qquad g_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

1. Déterminer le domaine de convergence simple de chacune de ces séries d'applications.
Sur ces domaines respectifs, on définit la fonction zêta de Riemann, notée $x \in]1,+\infty[\to \zeta(x)$ comme la somme de la série $\sum f_n$ et la fonction G, notée $x \in]0,+\infty[\to G(x)$, comme la somme de la série $\sum g_n$.

2. Trouver une relation entre zêta et G

A l'aide des restes déterminer la limite de G en $+\infty$ puis celle de la fonction zêta.

3. Que vaut G en $+1$ déterminer la limite de la fonction zêta à droite de 1.

Donner un développement asymptotique de la fonction zêta en 1 à droite de 1.

4. Montrer que l'application ζ est dérivable sur $]1,+\infty[$.

5. Montrer que l'application ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$

6. Montrer que la convergence vers l'application ζ n'est pas uniforme sur $]1,+\infty[$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Chapitre 4

SERIES ENTIERES

Sommaire

4.1 COURS

4.1.1 Introduction

4.1.1.1 Résumé

Nous étudions des séries d'applications particulières que sont les applications mônomes.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

1. Le domaine de convergence simple a la forme d'un disque caractérisé par le rayon de convergence
2. La somme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le disque ouvert et peut être dérivée ou intégrée terme à terme.

4.1.1.2 Positionnement mathématique

Archimède (-287-242) somme déjà une série géométrique infinie pour résoudre le problème de la quadrature de la parabole. De même les séries entières sont manipulées bien avant que ne soit posé le problème de la convergence des séries, telles des *polynômes continués.*
Au XVIIe siècle, on manipule les séries entières : on les intègre terme à terme et on les différentie terme à terme. Ainsi l'allemand Nicolas Mercator (1619-1687)donne le développement en série entière de log(1+x), Newton (1642-1727) donne en 1665 le développement de $(1+x)^\alpha$ avec des notations modernes :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{p=1}^{p=+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-p+1)}{p!}x^p$$

Une application polynôme est la somme d'un nombre fini d'applications monômes, déterminée par ses coefficients, en nombre fini, $(a_p)_{0\leq p\leq n}$:

$$P_n(z) = \sum_{p=0}^{p=n} a_p z^p$$

La somme d'une série d'applications monômes, appelée série entière, a donc été naturellement considérée comme une application qui généralise la notion d'application polynôme, tout en étant déterminée par une suite infinie de coefficients, $(a_p)_{0\leq p}$:

$$\sum_{p=0}^{p=+\infty} a_p z^p \qquad 1 \leq p \leq n,$$

ceci sans tenir compte des difficultés liées au passage à la limite et qui ont fait l'objet des précédents cours. En effet, la somme d'une série entière vérifie seulement :

$$\sum_{p=0}^{p=+\infty} a_p z^p = \lim_{n\to+\infty} P_n(z) \qquad \text{avec} \qquad P_n(z) = \sum_{p=0}^{p=n} a_p z^p.$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Si on a pu obtenir autant de résultats justes sans se soucier de convergence uniforme, c'est que nombre des résultats utilisés intuitivement en généralisant les propriétés des polynômes sont effectivement vrais pour ce type très particulier de séries d'applications que sont les séries entières.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

4.1.2 Définitions

Definition 4.1.

1. Une ***série entière de la variable réelle*** *est une série d'applications monômes définies sur* $\mathbb{R}$*. Elle s'écrit donc sous la forme :*

$$\sum a_p x^p.$$

2. La suite numérique [a] $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *est appelée* ***la suite des coefficients de la série entière*** $\sum a_p x^p$*.*

3. On peut étendre l'ensemble de définition de la série entière $\sum a_p x^p$ *à* $\mathbb{C}$*. On l'appelle alors* ***série entière de la variable complexe*** *et la variable est généralement notée* z*. On la note :*

$$\sum a_p z^p.$$

[a] Suite numérique réelle ou complexe

Nous avons déjà rencontré de telles séries d'applications, la série géométrique $\sum z^n$ et la série exponentielle $\sum \frac{z^n}{n!}$.

Etudions tout d'abord le domaine de convergence simple de ce type de série d'applications. Observons que celui de la série géométrique est le disque ouvert de rayon 1, celui de la série exponentielle est $\mathbb{C}$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

4.1.3 Domaine de convergence simple

Rappel
Rappelons que l'ensemble des valeurs de z telles que la série numérique $\sum a_p z^p$ converge est le domaine de convergence simple de cette série entière.

Le domaine de convergence simple d'une série entière a une forme très simple, c'est un disque au bord près, ce qui nous amène à introduire des notions spécifiques : celles de disque de convergence et de rayon de convergence.

Remarque 4.1.1.
Toute série entière converge pour la valeur 0 de la variable.

4.1.3.1 Détermination pratique du domaine de convergence simple

On étudie d'abord l'absolue convergence d'une série entière ce qui permet d'utiliser les théorèmes de comparaison aux séries géométriques.

Exemple 4.1.1.
Déterminer le domaine de convergence simple de la série entière $\sum \frac{2^n}{4n^2-5} z^n$:
z étant fixé, non nul, on étudie la nature de la série numérique à termes réels strictement positifs $u_n = \mid a_n z^n \mid$ avec le critère d'Alembert.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\frac{(4(n+1)^2-5)}{\mid 4n^2-5 \mid} \mid z \mid \quad \text{et} \quad \underset{n \to +\infty}{\frac{u_{n+1}}{u_n}} = 2 \mid z \mid .$$

Selon le critère d'Alembert
- si $\mid z \mid < \frac{1}{2}$, $\sum u_n$ converge et $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- si $\frac{1}{2} < \mid z \mid$, $\sum u_n$ diverge grossièrement et il en est de même de $\sum a_n z^n$.

Nous montrons ainsi tout d'abord une règle simple qui permet de décrire rapidement le domaine de convergence simple de la série entière sous la seule hypothèse que les coefficients de la série entière ne s'annulent pas et que la suite $(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ ait une limite.[1]

[1] Si $(\sqrt[n]{|a_n|})$ tend vers λ, on pourra utiliser la comparaison aux séries géométriques par le critère de Cauchy.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Théorème 4.1.

Si les coefficients a_n sont non nuls et si $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lambda$ *alors :*

1 . *Soit* $\lambda = 0$, *et* $\forall z \in \mathbb{C}, \sum a_n z^n$ *converge absolument.*

2 . *Soit* $\lambda = +\infty$, *et* $\forall z \in \mathbb{C}$ $\sum a_n z^n$ *diverge grossièrement.*

3 . *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ *et il existe un réel strictement positif* R_a *tel que*

$$\begin{cases} \forall z \in \mathbb{C}, & |z| < R_a \quad \text{la série} \sum a_n z^n \text{converge absolument.} \\ \forall z \in \mathbb{C}, & R_a < |z| \quad \text{la série} \sum a_n z^n \text{diverge grossièrement.} \end{cases}$$

Conséquence :
Dans tous les cas le domaine de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est un disque de centre 0

1 . Dans le premier cas, il a pour rayon $R_a = +\infty$

2 . Dans le deuxième cas, $R_a = 0$

3 . Dans le troisième cas, $R_a = \frac{1}{\lambda}$

4.1.3.2 Définition générale du rayon de convergence

Lemme 4.1. *lemme d'Abel*
S'il existe une valeur réelle r strictement positive telle que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée, alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout nombre complexe z de module strictement inférieur à r.

démonstration. en cours□

Théorème 4.2. *caractérisation du rayon de convergence.*

Etant donné une série entière de la variable complexe, $\sum a_n z^n$, il existe un nombre $R_a \in [0, +\infty]$, tel que

1. *Si $|z| < R_a$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument*
2. *Si $R_a < |z|$, la suite $(a_n z^n)$ est non bornée et la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.*

démonstration.
Soit $I_a = \{r \in \mathbb{R}^+ / \text{la suite} (a_n r^n) \text{est bornée.}\}$. I_a est un intervalle de $\mathbb{R}^+$ qui contient 0. On montre que $R_a = \sup(I_a)$ vérifie les conditions du lemme d'Abel.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

□

Definition 4.2.

- *Le nombre $R_a \in [0, +\infty]$ défini par le théorème (4.2)est appelé* ***le rayon de convergence***[a] *de la série entière de coefficients (a_n).*
- *Le disque ouvert de centre 0 et de rayon R_a , $\{z \in \mathbb{C}/|z| < R_a\}$, est appelé le* ***disque ouvert de convergence*** *de la série entière $\sum a_n z^n$*
- *Le disque fermé de centre 0 et de rayon r ,c'est à dire $\{z \in \mathbb{C}/|z| \leq R_a\}$ est appelé* ***le disque fermé de convergence*** *de la série entière $\sum a_n z^n$*
- *Le cercle $\{z \in \mathbb{C}/|z| = R_a\}$ est appelé le* ***cercle d'incertitude*** *de la série entière.*

[a] Nous ne donnons pas ici de méthode générale de calcul du rayon de convergence telle que la formule de Hadamard : $R_a = \dfrac{1}{\limsup(\sqrt[p]{|a_p|})}$.

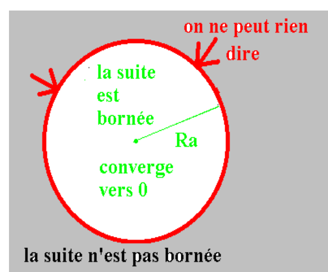
Exemple de référence 4.1.

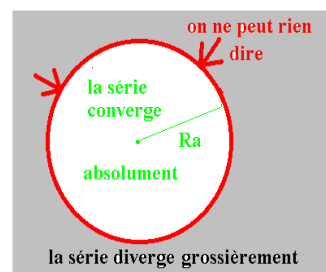
La série géométrique $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1.

La série exponentielle $\sum \frac{1}{n!} z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

Conséquence

Le domaine de convergence simple d'une série entière de la variable complexe contient son disque ouvert de convergence et est inclus dans son disque fermé de convergence. Il n'existe pas de résultat général en les points du cercle d'incertitude :





Le domaine de convergence simple d'une série entière de la variable réelle contient l'intervalle ouvert de convergence $]-R_a, R_a[$ et est inclus dans l'intervalle fermé de convergence $[-R_a, R_a]$. Il n'existe pas de résultat général[2] en les points R_a et $-R_a$.

[2] c'est à dire valable pour toute série entière

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

4.1.4 Opérations sur les séries entières

On se donne deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b et un scalaire λ dans $\mathbb{C}$ non nul.
Introduction

$$\forall z \in \mathbb{C}/ \mid z \mid < R_a \quad \lambda \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{n=+\infty} (\lambda a_n) z^n$$

Cette opération sur les séries de fonctions [1] s'exprime donc directement sur les coefficients de la série entière, prolongeant ainsi le calcul sur les polynômes que l'on définit à partir de leur coefficients.

4.1.4.1 Structure vectorielle

Definition 4.3. *produit par un nombre complexe, somme*

Le produit du scalaire λ et de la série $\sum a_n z^n$ est la série entière $\sum(\lambda a_n) z^n$.
La somme des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, est la série entière $\sum(a_n + b_n) z^n$.

Proposition 11. *Rayon de convergence et produit avec un scalaire non nul*
Le rayon de convergence de la série entière $\sum(\lambda a_n) z^n$ est égal à R_a et :

$$\forall z \in \mathbb{C}/ \quad |z| < R_a \quad \sum_{n=0}^{n=+\infty} (\lambda a_n) z^n = \lambda (\sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n z^n)$$

Théorème 4.3. *Rayon de convergence de la somme*

Le rayon de convergence R de la série entière $\sum(a_n + b_n) z^n$ est supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$, et on a :

$$\forall z \in \mathbb{C}/ \quad |z| < R \Rightarrow \sum_{n=0}^{n=+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{n=+\infty} b_n z^n$$

Si $R_a \neq R_b$ alors on a précisément $R = \min(R_a, R_b)$.

Théorème 4.4. *cas de deux séries entières disjointes*

Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont disjointes si $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n b_n = 0$.
Alors le rayon de convergence de $\sum(a_n + b_n) z^n$ est $\min(R_a, R_b)$.

[1] établie pour chaque élément du domaine de convergence à partir des propriétés des opérations sur les séries numériques étudiées au premier chapitre

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exemple 4.1.2.

$$\sum z^{2n} : \; a_{2n} = 1, a_{2n+1} = 0 \; R_a = 1$$

$$\sum \frac{z^{2n+1}}{2n+1} : \; b_{2n} = 0, b_{2n+1} = \frac{1}{n+1} \; R_b = 1$$

$$c_n = a_n + b_n \; R = 1 \quad \text{et} \quad \mid z \mid < 1 \; \sum_{n=0}^{n=+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{n=+\infty} z^{2n} + \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{1}{n+1} z^{2n+1}$$

4.1.4.2 Produit de deux séries entières

Definition 4.4.

On appelle produit des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ la série entière de coefficients (c_n) où

$$c_n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k b_{n-k}$$

Théorème 4.5. *rayon de convergence du produit*

Le rayon de convergence R de la série entière $\sum c_n z^n$, produit des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, est supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$ et :

$$\forall z \in \mathbb{C}/ \quad |z| < R \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=0}^{n=+\infty} c_n z^n = (\sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{n=+\infty} b_n z^n)$$

démonstration. en cours □

Remarque 4.1.2. : Cas particulier du produit par un monôme z^k
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série entière $\sum a_n z^{k+n}$ a pour rayon de convergence R_a :

$$\text{et} \qquad \forall z \in \mathbb{C}/ \quad |z| < R_a \quad \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n z^{n+k} = z^k \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n z^n$$

4.1.4.3 Substitution d'un monôme

Nous n'étudions pas la substitution d'une série entière dans une autre, par contre la substitution de monômes est une propriété simple que nous utiliserons constamment sans toujours l'expliciter.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Proposition 12. *substitution de monômes*
1. Le rayon de convergence de la série entière $\sum(a_n\lambda^n)z^n$ *est* $R_a|\lambda|^{-1}$ *et :*

$$\forall z \in \mathbb{C}/ \quad |z| < \frac{R_a}{|\lambda|} \qquad \sum_{n=0}^{n=+\infty}(a_n\lambda^n)z^n = \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n(\lambda z)^n.$$

2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$*, le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^{pn}$ *est* $\sqrt[p]{R_a}$ *et :*

$$\forall z \in \mathbb{C}/ \quad |z| < \sqrt[p]{R_a} \quad \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n z^{pn} = \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n(z^p)^n.$$

Exemple 4.1.3.
Rayon de convergence et somme des séries $\sum 2^n z^n$, $\sum z^{2n}$, $\sum(-1)^n z^{2n}$.

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad | z |\leq \frac{1}{2} \quad \sum_{n=0}^{n=+\infty} 2^n z^n = \sum_{n=0}^{n=+\infty}(2z)^n = \frac{1}{1-2z}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad | z |\leq 1 \quad \sum_{n=0}^{n=+\infty} z^{2n} = \sum_{n=0}^{n=+\infty}(z^2)^n = \frac{1}{1-z^2}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad | z |\leq 1 \quad \sum_{n=0}^{n=+\infty}(-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{n=+\infty}(-z^2)^n = \frac{1}{1+z^2}$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

4.1.5 Propriétés de la somme d'une série entière

Etant donnée une série entière $\sum a_n z^n$ de coefficients (a_n). R_a son rayon de convergence.
On se limite ici à l'étude de la série entière d'une variable réelle $\sum a_n x^n$.

4.1.5.1 Domaine de convergence uniforme

Théorème 4.6. *convergence normale*

La série entière de la variable réelle $\sum a_n x^n$ converge normalement et donc uniformément sur tout segment $[-\alpha, \alpha]$ inclus dans $]-R_a, R_a[$.

démonstration. en cours □

Conséquence :
La somme de la série entière d'une variable réelle $\sum a_n x^n$ est une application continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R_a, R_a[$. [1]

4.1.5.2 Dérivées de la somme d'une série entière

Théorème 4.7. *dérivation terme à terme et rayon de convergence*

Deux séries entières obtenues l'une à partir de l'autre par dérivation terme à terme ou par intégration terme à terme ont même rayon de convergence.

démonstration. en cours □

Remarque 4.1.3.
Toutes les séries entières obtenues par dérivations successives terme à terme ont même rayon de convergence R que la série initiale.

Théorème 4.8. *dérivations terme à terme successives*

[1] On peut prolonger la notion de normale et d'uniforme convergence sur un disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence à la somme d'une série entière d'une variable complexe $\sum a_n z^n$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

La somme *d'une série entière est une application* ***de classe*** C^∞ ***sur l'intervalle ouvert de convergence*** $]-R_a, R_a[$.

1. *Calcul de la dérivée par dérivation terme à terme :*

$$\forall x \in]-R_a, R_a[, \qquad \Big(\sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n x^n\Big)' = \sum_{n=1}^{n=+\infty} n a_n x^{n-1}$$

2. *Calcul de la dérivée* $k^{ìme}$ *par dérivations terme à terme successives.*

$$\forall x \in]-R_a, R_a[, \quad \Big(\sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n x^n\Big)^{(k)} = \sum_{n=k}^{n=+\infty} n(n-1)...(n-(k-1))a_n x^{n-k}$$

démonstration. en cours □

Remarque 4.1.4. Autres écritures pour $|x| < R_a$

$$\Big(\sum_{p=0}^{p=+\infty} a_n x^n\Big)' = \sum_{n=1}^{n=+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{p=0}^{p=+\infty} (p+1)a_{p+1}x^p$$

$$\Big(\sum_{p=0}^{p=+\infty} a_n x^n\Big)^{(k)} = \sum_{p=0}^{p=+\infty} (p+k)(p+k-1)...(p+1)a_{p+k}x^p$$

Exemple 4.1.4.
Rayon de convergence et somme de $\sum_{1 \leq n} n x^{n-1}$

$$1 \leq n \quad n x^{n-1} = (x^n)' \quad \forall x \in]1, 1[\quad \sum_{n=0}^{n=+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$R = 1 \quad \forall x \in]1, 1[\quad \sum_{n=1}^{n=+\infty} n x^{n-1} = ((1-x)^{-1})' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

4.1.5.3 Primitive de la somme d'une série entière

Théorème 4.9. *intégration terme à terme*

1. *Intégration terme à terme :*

$$\forall \alpha, \beta \in]-R_a, R_a[\quad \int_\alpha^\beta \Big(\sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n t^n \Big)\, dt = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \Big(\int_\alpha^\beta a_n t^n\, dt \Big)$$

2. *Sur* $]-R_a, R_a[$, *une primitive* F *de la somme s'écrit :*

$$\forall x \in]-R_a, R_a[\qquad F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Exemple 4.1.5.

Rayon de convergence et somme de $\sum_{0 \leq n} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

$$0 \leq n \quad \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x t^n dt \quad \forall x \in]1, 1[\quad \sum_{n=0}^{n=+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$R = 1 \quad \forall x \in]1, 1[\quad \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = 0 + \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x)$$

4.1.5.4 Expression des coefficients d'une série entière en fonction de sa somme

Théorème 4.10.

Les coefficients a_p *d'une série entière* $\sum a_p x^p$, *de rayon de convergence non nul et de somme* S *vérifient :*

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad a_p = \frac{S^{(p)}(0)}{p!}$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

4.1.6 Développement en série entière

On se donne une application f de D, sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $]-r,r[$ un sous-ensemble non vide de D (0<r).
On cherche s'il existe une série entière dont f soit la somme sur $]-r,r[$, combien il en existe et à quelles conditions sur f.
La réponse est qu'il y a au plus une telle série, c'est la série de Taylor de f en 0 et dans ce cas f est nécessairement de classe $\mathcal{C}^\infty$. Cette condition nécessaire n'est pas suffisante.

4.1.6.1 Développement et Polynôme de Taylor de f en 0

Definition 4.5.

f est développable en série entière à l'origine s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R, $r < R$ dont f soit la somme sur $]-r,r[$, c'est à dire telle que :

$$\forall x \in]-r,r[, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n x^n$$

On dit alors que la série $\sum a_n x^n$ est un développement en série entière de f sur $]-r,r[$.

Exemple de référence 4.2.

L'application $(x \in]-\infty, 1] \mapsto \frac{1}{1-x})$ est développable en série entière

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 < x < 1 \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{n=+\infty} x^n.$$

Théorème 4.11. *développable entraîne $\mathcal{C}^\infty$*

Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$ alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,r[$, et la série entière obtenue coïncide nécessairement avec sa série de Taylor de f en 0 i.e. $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

Remarque 4.1.5.
Si f admet un développement en série entière, il est défini de manière unique, nous parlerons du développement en série entière de f en 0.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Théorème 4.12. *$\mathcal{C}^\infty$ et restes tendent vers 0*

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,r[$, f est développable en série entière sur $]-r,r[$ si et seulement si la suite (R_{n+1}) des restes de Taylor d'ordre n de f en 0 converge simplement vers l'application nulle sur $]-r,r[$.

On sait évaluer R_{n+1}

soit avec la formule de Taylor et reste intégral : $R_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$

soit avec la formule de Taylor Lagrange : $R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$ où $0 < \theta < 1$

démonstration. en cours□

Remarque 4.1.6.
Si f a un développement en série entière dans $]-r,r[$ alors f a un développement limité à tout ordre en 0. Mais ces notions sont très différentes :

D. L. $f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon(x)$ signifie $\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

D. S. E. : $f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$ signifie $\forall x \in]-r,r[\quad \lim_{n \to \infty} R_{n+1}(x) = 0$

Exemple de référence 4.3.

L'application $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp x$ est développable en série entière

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp x = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Exemple de référence 4.4.

Les applications cosinus et sinus sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos x = \sum_{p=0}^{p=+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin x = \sum_{p=0}^{p=+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

Théorème 4.13.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Toute combinaison linéaire, tout produit d'applications développables en séries entière sur l'intervalle $]-r,r[$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-r,r[$.
Toute primitive, tout dérivée d'une application développable en série entière sur l'intervalle $]-r,r[$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-r,r[$.
Si une application développable en série entière sur l'intervalle $]-r,r[$ est paire (resp. impaire) alors son développement en série entière est pair .

Les applications cosinus et sinus hyperboliques, sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad chx = \sum_{p=0}^{p=+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad shx = \sum_{p=0}^{p=+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...$$

Exemple de référence 4.5.
Voici comment développer en série entière une fraction rationnelle, n'admettant pas le pôle 0, et qui a été décomposée en somme d'éléments simples de première espèce dans $\mathbb{R}(X)$ ou $\mathbb{C}(X)$.

$$\mid z \mid < \mid a \mid, \qquad \frac{1}{a-z} = \frac{1}{a(1-\frac{z}{a})} = \frac{1}{a}\sum_{p=0}^{p=+\infty} \frac{z^p}{a^p} = \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} + \cdots + \frac{z^n}{a^{n+1}} + ...$$

$$\mid x \mid < \mid a \mid, \qquad \frac{1}{(a-x)^2} = \frac{1}{a}\sum_{p=1}^{p=+\infty} \frac{n}{a^n} x^{n-1} = \frac{1}{a^2} + 2\frac{x}{a^3} + \cdots + n\frac{x^{n-1}}{a^{n+1}} + ...$$

Le premier développement est obtenu directement à partir de l'exemple de référence 4.2. Pour le second, on utilise le théorème de dérivation terme à terme d'une série entière (4.8). Toutefois lorsque k est suffisamment grand il est préférable de chercher le développement en série entière de $(x \to \dfrac{1}{(a-x)^k})$ en utilisant le développement en série entière, de rayon de convergence 1, de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha = -k$.
Les applications $\ln(1+x)$, $\arctan x$ et $\arg\tanh x$ sont développables en série entière sur $]-1,1[$ et :

$$\ln(1+x) = \sum_{p=1}^{p=+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} x^p = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + ... \qquad (4.1)$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Cette égalité se prolonge en 1.

$$\ln(1-x) = -\sum_{p=1}^{p=+\infty} \frac{x^p}{p} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots$$

Cette égalité se prolonge en -1.

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{p=0}^{p=+\infty} (-1)^p x^{2p} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^{2n} x^{2n} + \ldots$$

$$\arctan x = \sum_{p=0}^{p=+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} x^{2p+1} = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Cette application n'est pas développable en série entière sur $\mathbb{R}$, bien qu'elle soit de classe $\mathcal{C}^\infty$.

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{p=0}^{p=+\infty} x^{2p} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2p} + \ldots$$

$$\arg\tanh x = \sum_{p=0}^{p=+\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} = x + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Exemple de référence 4.6.

Pour tout réel α l'application $(x \in \mathbb{R} \mapsto (1+x)^\alpha)$ est développable en série entière

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 < x < 1 \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{p=1}^{p=+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-p+1)}{p!} x^p.$$

Méthode de l'équation différentielle

Il faut connaître cette méthode permettant de résoudre une équation différentielle ou une équation fonctionnelle en cherchant une solution développable en série entière.

1. f_α est la solution sur $]-1,\infty[$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (1+x)y' - \alpha y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

2. Si f est développable en série entière sur $]-r, r[$ où $0 < r$:

$$-r < x < r \Rightarrow f(x) = \sum_{p=0}^{p=+\infty} a_p x^p$$

D'après le théorème (4.8) :

$$| x |< r \qquad f'(x) = \sum_{p=1}^{p=+\infty} p a_p x^{p-1} = \sum_{p=0}^{p=+\infty} (p+1) a_{p+1} x^p$$

$$\text{et} \qquad | x |< r \qquad x f'(x) = \sum_{p=0}^{p=+\infty} p a_p x^p$$

Le coefficient de x^p dans le développement de $(f' + xf' - \alpha f)^1$ est :

$$\big((p+1)a_{p+1} + (p-\alpha)a_p\big)$$

Or cette application est nulle sur $]-1, +\infty[$, donc :

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad (p+1)a_{p+1} + (p-\alpha)a_p = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{p+1} = \frac{\alpha - p}{p+1} a_p$$

D'où, éventuellement en écrivant les premiers termes de la série :

$$(a_1 - \alpha a_0) + (2a_2 + a_1 - \alpha a_1)x + ...$$

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = \alpha \qquad a_2 = \alpha \frac{\alpha - 1}{2} \qquad a_3 = \alpha \frac{\alpha-1}{2} \frac{\alpha-2}{3}$$

Par récurrence

$$a_p = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-p+1)}{p!}$$

3. Rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? si z n'est pas nul, la série numérique à termes $\sum u_p$ où $u_p = |a_p||z^p|$ vérifie :

$$0 < u_p \quad \frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{|a_{p+1} z^{p+1}|}{|a_p z^p|} = \frac{p-\alpha}{p+1}|z| \quad et \quad \lim_{p \to +\infty} \frac{u_{p+1}}{u_p} = |z|$$

Le critère d'Alembert montre que $\sum u_p$ converge si $|z| < 1$ et diverge grossièrement si $1 < |z|$, le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est 1, f_α coïncide sur $]-1, 1[$ avec la somme de cette série entière. La fonction f est développable en série entière sur $]-1, 1[$.

$$\forall x \in]-1, 1[, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n x^n$$

[1]remarquer qu'il est facile de développer $(1+x)f'$ sous la forme $f' + xf'$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

4.1.7 Exponentielle de la variable complexe

Definition 4.6.
On prolonge l'application exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par une application définie sur $\mathbb{C}$, et à valeurs dans $\mathbb{C}$, appelée exponentielle complexe, en écrivant :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \exp(z) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Théorème 4.14. *homomorphisme du groupe additif sur le multiplicatif.*

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \qquad \exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$$

Corollaire 3.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \qquad \exp(nz) = (\exp z)^n$$

Théorème 4.15.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \overline{\exp z} = \exp \bar{z}$$

Théorème 4.16. *forme algébrique de z et trigonométrique de $\exp(z)$*

Si $z = x+iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ alors

$$\exp z = \exp(x + iy) = \exp x \exp iy = \exp x(\cos y + i \sin y)$$

$\exp z$ *a pour module* $\exp x$ *et pour argument* y*. On en déduit la formule de Moivre :*

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad \cos ny + i \sin ny = (\cos y + i \sin y)^n$$

L'exponentielle complexe a pour période $2i\pi$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z + i2k\pi) = \exp z$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

A savoir :

$$\exp z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} / z = i2k\pi$$

$$\exp(2i\pi) = 1 \qquad \exp(i\pi) = -1 \qquad \exp(i\frac{\pi}{2}) = i$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \exp(2ik\pi) = 1 \qquad \exp(ik\pi) = (-1)^k \qquad \exp\left(ik\frac{\pi}{2}\right) = i^k$$

Attention : L'équation (1) $\exp z = z_0$ a une infinité de solutions.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

4.2 EXERCICES

4.2.1 Avec Maple

On peut utiliser le package « powseries »avec les commandes « powsin », « powexp », « powslog »pour développer en série entière les applications « sinus », « exponentielle », « logarithme ».

« evalpow » : pour créer une série entière pour n'importe quelle fonction
« powsolve « : pour chercher la solution d'une équation différentielle linéaire développable en série entière. Maple donne les premiers termes mais pas toujours le terme général...

4.2.2 Convergence simple et Rayon de convergence

4.2.2.1 apprentissage du cours

Déterminer le domaine de convergence simple des séries entières, c'est en trouver le rayon de convergence.

Exercice 4.1.
Déterminer le rayon de convergence des séries entières

$$\sum n!z^n, \qquad \sum \frac{1}{1+4n^2}z^n, \qquad \sum \frac{1}{n!}z^n, \qquad \sum \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}z^n$$

$$\sum n^n z^n, \qquad \sum (\sin(\pi(2-\sqrt{3})^n))^n z^n$$

Exercice 4.2.
Etudier la convergence simple sur le cercle d'incertitude des séries entières $\sum z^n$, et $\sum \frac{1}{n^2}z^n$. Etudier la convergence simple de $\sum \frac{1}{n}x^n$ sur $\{-1, 1\}$.

4.2.2.2 pour aller plus loin

Exercice 4.3.
1. Que valent les coefficients a_{3n+1} et a_{3n+2} de la série entière $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2}z^{3n}$
Déterminer le rayon de convergence de cette série entière en écrivant, pour z fixé non nul, les termes non nuls de cette série numérique sous la forme $u_p = |a_{\varphi(p)}z^{\varphi(p)}|$ où l'application φ définit une suite extraite $(a_{\varphi(p)})$ formée des termes non nuls de la suite (a_n).
2. De même, déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum n^n z^{n^2}$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exercice 4.4. un sujet d'examen
On considère la série entière de la variable réelle x dépendant du paramètre réel t :

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp(-n^2 t) x^{n^2}$$

Déterminer le rayon de convergence $R(t)$ de cette série entière ?
Que se passe-t-il si $x = R(t)$, si $x = -R(t)$?

4.2.2.3 pour en savoir plus

Exercice 4.5.
Vérifier que si $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$, les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Exercice 4.6.
Comparer les rayons de convergence R_b et R_a des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sachant que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |a_n| \leq |b_n|$$

Encadrer a_n et donner le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ si

$$a_n = \int_0^1 (\frac{1+t^2}{2})^n dt$$

4.2.3 Opérations sur les séries entières

4.2.3.1 apprentissage du cours

Exercice 4.7.
A la suite numérique (a_n), définie par : $a_n = 0$ si n est pair $a_n = 1$ si n est impair, on associe les deux séries entières suivantes :

$$1. \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n x^n \qquad \text{et} \qquad 2. \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de chacune de ces séries entières.

4.2.3.2 pour aller plus loin

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exercice 4.8.
Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières :

$$\sum \frac{n^2+1}{n!}x^n \qquad \sum 2^n \frac{n^2+1}{n!}x^n \qquad \sum 2^n \frac{n^2+1}{n!}x^{2n}$$

4.2.4 Convergence uniforme et Propriétés de la somme

4.2.4.1 apprentissage du cours

Exercice 4.9.
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes, puis exprimer la somme de ces séries entières sur le disque ouvert de convergence à l'aide de fonctions classiques.

$$1. \sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n+1}x^{4n+1} \qquad 2. \sum_{n\geq 0} \frac{n}{n+1}x^n$$

$$3. \sum nx^{n-1} \qquad 4. \sum_{n\geq 0} nx^n \qquad 5. \sum nx^{2n-2}$$

$$6. \sum_{n\geq 0} n^2x^n \qquad 7. \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}x^n$$

Exercice 4.10.
Montrer que la série $\sum z^n$ ne converge pas uniformément sur le disque unité ouvert D_a.

Exercice 4.11.
Soit R_a le rayon de convergence d'une série entière de la variable réelle $\sum a_n x^n$. On suppose que la série $\sum |a_n| R_a^n$ est convergente[1] Montrer que la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ est continue sur $[-R_a, R_a]$.

4.2.4.2 pour aller plus loin

Exercice 4.12.
Nous avons vu en cours que les séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$ $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence. Trouver une série entière $\sum a_n z^n$ telle que en chaque point du cercle d'incertitude les séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$ sont de natures différentes.

[1]Ce résultat est maintenu, si on suppose seulement $\sum a_n R_a^n$ convergente, mais plus difficile à établir.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exercice 4.13.
Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière :

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} (n^2+n+1)x^n$$

Exercice 4.14. [1] coefficients définis par récurrence et équation différentielle.

On considère la suite (a_n) définie par

$$a_0 = a_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 1 \leq a_n \leq n^2$
2. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$
3. Montrer que la somme f de cette série entière est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 et déterminer f.
4. Montrer[2] que :

$$a_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-2)^p(n-p+1)(n-p+2)}{2p!}$$

4.2.5 Développement en série entière

4.2.5.1 apprentissage du cours

Exercice 4.15.
Justifier l'existence du développement en série entière à l'origine, donner le développement et le rayon de convergence pour chacune des applications suivantes :

1.$f(x) = \ln(1+2x+x^2)$ 2.$f(x) = \ln(2+5x)$ 3.$f(x) = (1+x)\ln(1+x)$

4.$f(x) = \sin^2 x$ 5.$f(x) = 2\ln(\frac{1-x}{1+x}) + \frac{2x}{1-x^2}$

Exercice 4.16. résolution d'une équation différentielle
On considère l'équation différentielle (1) : $(x^2+1)y'' - 2y = 0$

[1] sujet d'examen

[2] Cette dernière question ne sera traitée qu'après avoir vu les développements en série entière.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

1. Cette équation différentielle est une équation différentielle linéaire du second ordre. Savez-vous la résoudre par les méthodes données au début du cours de seconde année ?
2. Déterminer les solutions de (1) qui sont développables en série entière. Donner le rayon de convergence des séries obtenues.
3. Soit $f(x)$ la somme de la série solution telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Exprimer $\dfrac{f'(x) - 1}{x}$ à l'aide de fonctions élémentaires.
4. Déterminer la solution f de cette équation qui satifait la condition initiale $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Exercice 4.17. développement en série entière des fractions rationnelles
1. Déterminer le développement en série entière des applications fractions rationnelles F, G et H définies par[1]

$$F(x) = \frac{1}{ax + b} \qquad G(x) = \frac{2 + x + x^2}{(2 + x)(1 + x)(1 - 2x)} \qquad H(x) = \frac{1 + 2x}{1 + x + x^2}$$

2. Préciser leur rayon de convergence.

Exercice 4.18. *les coefficients définis par une relation de récurrence*
1. Déterminer la somme f d'une série entière de rayon de convergence non nul dont les coefficients sont définis par la relation de récurrence :

$$a_0 = a_1 = 1 \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

2. Vérifier que le rayon de convergence de cette série entière est $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

4.2.5.2 pour aller plus loin

Exercice 4.19. équation fonctionnelle
On se propose de trouver une solution développable en série entière de (1) où

$$f(x) + f(-x) = f(x^2) \qquad (1)$$

1. En écrivant que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n x^n$$

[1] $a \in \mathbb{R}^*, \quad b \in \mathbb{R}$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

est solution de (1), déduire une relation de récurrence entre a_{2p} et a_p, pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Calculer a_0 puis a_n pour $n = 2^p$ en fonction de a_1.

2. Les coefficients a_{2k+1} étant indéterminés, on étudie une solution particulière obtenue en choisissant $a_{2k+1} = \dfrac{1}{2k+1}$. Montrer qu'alors les coefficients a_n sont déterminés de manière unique.

Trouver le rayon de convergence et la somme de la série entière de coefficients (a_n).

Exercice 4.20. On considère l'équation différentielle

$$(1) : \qquad (1-x^2)y'(x) - xy(x) = 2.$$

1. Chercher la solution développable en série entière de (1) qui s'annule en 0.
2. Montrer que l'application $f : x \mapsto (\arcsin x)^2$ est deux fois dérivable sur $]-1,1[$ et que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2,$$

en déduire que le développement en série entière de f sur $]-1,1[$ est

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{2^{2n-1}(n-1)!^2}{(2n)!} x^{2n}.$$

Exercice 4.21. *intégrale et série entière*

1. Soit t un réel donné, décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$x \mapsto F(t,x) = \frac{x \sin t}{1 - 2x \cos t + x^2}$$

2. Développer en série entière de x sur $]-1,1[$ la fraction rationnelle $x \mapsto F(t,x)$, sous la forme :

$$\forall \mid x \mid < 1, \quad F(t,x) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} f_n(t,x) \qquad \text{où} \quad f_n(t,x) = a_n(t)x^n$$

3. Vérifier que pour tout x élément de $]-1,1[$, la série des applications $t \mapsto f_n(t,x)$ converge normalement sur $[0,\pi]$ et vérifier en utilisant le développement de $\arg\tanh$ donné ci-après :

$$\int_0^{\pi} \frac{(\sin t)\, x}{1 - 2(\cos t)\, x + x^2} dt = 2 \arg\tanh(x)$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

4.2.5.3 pour aller beaucoup plus loin

Exercice 4.22. la série de Taylor de f converge vers une somme autre que f
1. Montrer que la fonction

$$x \neq 0 \qquad f(x) = \exp\big(-\frac{1}{x^2}\big) \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. et que la dérivée d'ordre n est de la forme :

$$x \neq 0 \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{\alpha_n}} \exp\big(-\frac{1}{x^2}\big) \qquad \text{et} \qquad f^{(n)}(0) = 0$$

où P_n est un polynôme et α_n un entier.
2. En déduire que f n'est développable en série entière dans aucun voisinage de 0.

Exercice 4.23. cas où la série de Taylor de f a un rayon de convergence nul.

1. Montrer que la formule $f(x) = \sum_{p=0}^{p=+\infty} \dfrac{\sin(2^p x)}{p!}$ définit une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$f^{(n)}(0) = \sin\big(\frac{n\pi}{2}\big) \sum_{p=0}^{p=+\infty} \frac{2^{np}}{p!} = \sin\big(\frac{n\pi}{2}\big) \exp 2^n$$

2. Montrer que la série de Taylor de f a un rayon de convergence nul.

Exercice 4.24.
On considère une application f de classe $\mathcal{C}^\infty$, on se propose de montrer que si toutes les dérivées successives de f sont positives sur $[-R, R]$ où R est un réel strictement positif donné alors f est développable en série entière sur le voisinage $]-R, R[$ de 0.

1. Donner un exemple de telle application.
2. Soit $r \in]0, R[$ et $x \in]-r, r[$. En utilisant une formule de Taylor montrer que
$$|R_n(x) \leq \frac{|x|^{n+1}}{r^{n+1}} R_n(r)$$
où R_n est le reste de la série de Taylor.
3. Montrer que $R_n(r) \leq f(r)$ et en déduire que f est développable en série entière.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

4.2.6 Exponentielle de la variable complexe

4.2.6.1 apprentissage du cours

Exercice 4.25.
Soit r un réel strictement positif, et θ un réel donné. Résoudre l'équation

$$\exp z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

4.2.6.2 pour aller plus loin

Exercice 4.26.
Soit θ un réel donné. Préciser le rayon de convergence des deux séries entières :

$$1.\ \sum_{n=0}^{n=+\infty} \cos(n\theta)x^n \qquad \text{et} \qquad 2.\ \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n!}x^n$$

et calculer la somme de ces séries entières.

Exercice 4.27.
Soit f la somme d'une série entière de la variable complexe z de rayon de convergence R, $f(z) = \sum_0^{+\infty} a_n z^n$. Montrer que pour tout entier n, a_n vérifie :

$$\forall r \in]0, R[\qquad a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ni\theta} d\theta$$

4.2.6.3 pour en savoir plus

Exercice 4.28. On prolonge les applications trigonométriques et hyperboliques définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par des applications définies sur $\mathbb{C}$ valeurs dans $\mathbb{C}$ en définissant pour tout nombre complexe z :

$$\cosh z = \frac{1}{2}(\exp z + \exp(-z)) \qquad \sinh z = \frac{1}{2}(\exp z - \exp(-z))$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)) \qquad \sin z = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$$

1. Vérifier que les formules usuelles de trigonométrie valables pour les fonctions d'une variable réelle sont encore valables pour leur prolongement dans $\mathbb{C}$, montrer :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

2. Observer que les applications sinus et cosinus sont non bornées dans $\mathbb{C}$ en vérifiant que si $z = x + iy$, pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, alors

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \text{sh}^2 y = \text{ch}^2 y - \sin^2 x.$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Chapitre 5

ESPACES VECTORIELS NORMES

Sommaire

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

5.1 COURS PARTIE 1

5.1.1 Introduction

5.1.1.1 Résumé

Nous avons défini, au cours de l'étude des suites de fonctions, la norme $\| \quad \|_\infty$ ou norme de la convergence uniforme. Nous introduisons ici la notion générale de norme sur un espace vectoriel quelconque E. Nous pourrons alors définir la notion de suite et de série convergente d'éléments de E pour chaque norme définie sur E puis la notion d'espace vectoriel normé complet et de partie fermée d'un espace vectoriel normé avec le théorème du point fixe. Avec aussi peu de matériel nous atteignons un théorème essentiel, le théorème du point fixe, qui généralise un procédé de résolution d'équation que vous avez étudié en première année lors de l'étude des suites récurrentes de nombres réels ou complexes. Avec peu de concepts et des méthodes déjà connues, nous révélons alors un joyeux trésor mathématique, qui permet à la fois de montrer l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle non linéaire aussi générale que $y' = f(t, y)$ avec la condition initiale $y(0) = y_0$ sur un intervalle convenable qui contient 0 que d'obtenir une solution approchée avec une erreur majorée d'un système linéaire de 10 000 équations et à 10 000 inconnues.

5.1.1.2 Positionnement mathématique

Les Grecs avaient élaboré des modèles mathématiques de choses qui nous semblent aujourd'hui immédiatement accessibles aux sens : les concepts de nombre et de figure géométrique élémentaire. Ces modèles, décrits dans les Eléments d'Euclide, ont fondé le travail mathématique jusqu'au XVIIIe siècle, même si celui-ci semble avoir évolué considérablement en particulier avec l'invention de l'écriture algébrique et de la géométrie des coordonnées. Ainsi, jusqu'au XVIIIe siècle, la conception de l'intégrale était fondée sur la notion intuitive d'aire. Cependant cette description atomistique d'objets comme sous-ensembles d'ensembles de points qu'un mouvement permet éventuellement de déplacer, est insuffisante. Nous avons ainsi vu lors de l'étude des suites et séries de fonctions pourquoi on a été amené à introduire une notion de convergence moins intuitive que la notion de convergence ponctuelle appelée convergence simple.

---

[0]Comme par exemple l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Cet extraordinaire procédé de généralisation qui permet de travailler avec n'importe quel ensemble d'objets muni d'une structure d'espace vectoriel n'est pas trivial. Cette difficulté apparaît dans le soin avec lequel, en 1920, S. Banach [1] l'introduit : "afin de ne pas être obligé à démontrer isolément pour chaque champ particulier, ce qui serait bien pénible, j'ai choisi une voie différente que voici : je considère d'une façon générale les ensembles d'éléments dont je postule certaines propriétés, j'en déduis des théorèmes et je démontre ensuite de chaque champ fonctionnel particulier que les postulats adoptés sont vrais pour lui".

Nous considérerons des espaces vectoriels de dimensions finie ou infinie formés de familles particulières d'applications. Vous manipulez aisément la notion de fonction F d'une variable z réelle ou complexe à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ en un sens qui est proche de celui formulé au XVIIIe siècle par Euler lorsqu'il expose la méthode de décomposition en éléments simples sur l'exemple de la fraction rationnelle $F(z \rightarrow \dfrac{1+zz}{z-z^3})$ [2] mais, dans ce chapitre, vous devrez rapidement apprendre à maîtriser une notion beaucoup plus générale de fonction, qui à une application f associe une autre application $F(f)$. Cela va vous sembler difficile et c'est légitime : il a fallu deux siècles de travail pour qu'en 1903 Hadamard introduise cette notion de C([0,1]) dans C([0,1]) en livrant ce formidable outil de pensée qu'est la notation $f \rightarrow F(f)$ [3]. Et l'abstraction [4] ne se réduit pas à une notation, ce n'est pas un outil que l'on peut magistralement exhiber et qui se transmet dans l'immédiateté. Andrew Wiles, ce professeur de Princeton mondialement connu pour avoir résolu en 1993 le théorème de Fermat [5], décrit avec beaucoup d'authenticité la lenteur nécessaire du travail mathématique, loin du stéréotype des traits de génie [6]

[1] Thèse de Stefan Banach (Cracovie 1842 - Lvov 1945) publiée en 1920.

[2] Dans son *Introduction à l'analyse infinitésimale* Léonard Euler (Bâle 1707-St Pétersbourg 1783) fait de la notion de fonction le concept fondamental du travail mathématique. Nous citons ici le tome premier, Chap. II *De la transformation des fonctions* dans la traduction en français qu'en donne J.B. Labey. Parisen en l'An Quatrième de la République Française (1796) où est utilisée la notation fonction fractionnaire $\dfrac{1+zz}{z-z^3}$.

[3] Toutefois J. Hadamard (Versailles 1865 - Paris 1963) ne désigne alors pas F par le terme fonction mais par celui de fonctionnelle.

[4] L'abstraction en mathématiques ... le peintre abstrait Zao Wou Ki décrit de même l'abstraction en arts plastiques comme un besoin qui ne peut être décidé, mais qui émerge d'une personnalité artistique accomplie à travers un long travail authentique.

[5] Un rêve d'enfant agé de dix ans puisé dans une bibliothéque municipale : résoudre cet énigme mathématique vieille de 350 ans qu'était alors le théorème de Fermat : il n'existe pas d'entiers x, y, z et n tels que $2 < n$ et $x^n + y^n = z^n$?

[6] Des idées imbéciles et dangereuses qui hantent encore la culture comme en atteste le

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

fulgurants. Wiles décrit comment il a exploré de manière quasi obsessionnelle durant plus de sept ans un domaine inconnu.

On entre dans la première chambre et elle est obscure. Complètement obscure. On se heurte aux meubles, on finit par connaître leur emplacement. Après six mois, on finit par trouver le commutateur et soudain la pièce est éclairée. On peut voir exactement où l'on se trouve.	Andrew Wiles	Puis on passe à la pièce suivante, et l'on affronte à nouveau six mois d'obscurité. Donc, chacune des percées qui ont été faites et qui sont parfois brèves, ne durant qu'un jour ou deux, sont l'accomplissement des mois de tâtonnements dans le noir, sans lesquels il n'y aurait jamais eu de lumière[a]. [a]Le dernier théorème de Fermat. Simon Singh. 1998.

film Will Hunting.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

5.1.2 Normes et distances sur un espace vectoriel

5.1.2.1 Espace vectoriel normé

Nous nous donnons un espace vectoriel E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definition 5.1.

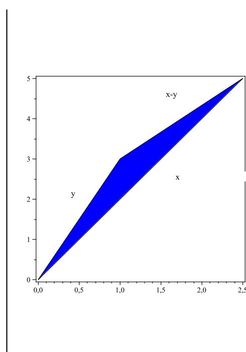
*On appelle **norme** sur l'espace vectoriel* E*, toute application* $N(x \mapsto N(x))$*, noté* $N(x) = \| x \|$ *définie sur* E *à valeurs dans* $[0, +\infty[$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $\forall x \in \mathrm{E},\ \| x \| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ *axiome de séparation*
2. $\forall x \in \mathrm{E},\ \forall \lambda \in K,\ \| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|$ *axiome d'homogénéité*
3. $\forall x \in \mathrm{E},\ \forall y \in \mathrm{E},\ \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ *inégalité du triangle.*

Definition 5.2.

Lorsqu'on considère l'espace vectoriel E *muni de la norme notée* $\| \|$*, le couple* $(\mathrm{E}, \| \|)$ *est appelé un **espace vectoriel normé**.*

Proposition 13. *Deux inégalités*



Toute norme vérifie les deux inégalités suivantes

$$\forall x \in E, \forall y \in E, |\quad \| x \| - \| y \| \ | \leq \| x - y \|$$

C'est la seconde inégalité du triangle

$$\forall x_i \in E^n\, \forall \lambda_i \in \mathbb{K}^n, \quad \| \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i x_i \| \leq \sum_{i=1}^{i=n} |\lambda_i| \| x_i \|$$

C'est la propriété de sous- linéarité

Exemple de référence 5.1. *Cas de l'espace vectoriel* $\mathbb{K}^n$[1]

Dans $(\mathbb{K}^n, +, .)$ *si* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *on définit les normes notées* $\| \|_2$*,* $\| \|_1$ *et* $\| \|_\infty$ *par :*

$$\| x \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{i=n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \| x \|_1 = \sum_{i=1}^{i=n} |x_i| \qquad \| x \|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

[1] ou d'un espace vectoriel E de dimension n rapporté à une base $(e_1, \cdots, e_n)$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

démonstration en cours

Prolongement :
La norme $\| \, \|_2$ est une norme associée à un produit scalaire, notion définie au chapitre IV. [1]

Exemple de référence 5.2. *Cas de l'espace vectoriel* $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ *où* $a < b$ [2]

Sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$, *nous connaissons déjà les normes de la convergence uniforme,* $\| \, \|_\infty$, *de la convergence quadratique,* $\| \, \|_2$, *et définissons la norme* ***de la convergence en moyenne***, $\| \, \|_1$, *:*

$$\| f \|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \qquad \| f \|_2 = \sqrt[2]{\int_a^b |f(t)|^2 \, dt} \qquad \| f \|_1 = \int_a^b |f(t)| \, dt$$

démonstration en cours

5.1.2.2 Distance associée à une norme

Proposition 14.
L'application d *définie sur* $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ *par*

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}\times\mathrm{E} \quad d(x,y) = \| x - y \|$$

vérifie : $\forall x \in \mathrm{E}, \forall y \in \mathrm{E}, \forall z \in \mathrm{E}$

1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *séparation*
2. $d(x,y) = d(y,x)$ *symétrie*
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *inégalité triangulaire* [3]

démonstration en cours

Remarque 5.1.1.
L'application d qui à (x,y) fait correspondre $d(x,y) = \| x - y \|$ définit donc une distance sur E associée à la norme $\| \, \|$.

[1] Elle vérifie des propriétés particulières comme l'identité du parallélogramme

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2)$$

[2] $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des applications continues définies sur [a,b] à valeurs dans $\mathbb{K}$.

[3] Cette inégalité constitue un outil pour majorer

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Definition 5.3.

L'application d de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \forall y \in \mathrm{E} \quad d(x, y) = \parallel x - y \parallel = N(x)$$

est appelée ***la distance associée à la norme N****.*

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

5.1.3 Suites et séries convergentes dans un espace vectoriel normé

Nous nous donnons $(\mathrm{E}, \| \|)$, un espace vectoriel normé et une application de $\mathbb{N}$ dans E : $(n \mapsto x_n)$ définissant une suite.

notations :
La suite est notée (x_n), la série $\sum x_n$ ou $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ lorsque $(\mathrm{E}, \| \|)$ est un espace vectoriel normé quelconque.
La suite est notée $(x^{[n]}) = (x_1^{[n]}, x_2^{[n]}, ..., x_p^{[n]})$, la série $\sum x^{[n]}$ lorsque $\mathrm{E} = \mathbb{K}^p$.
La suite est notée (f_n), la série $\sum f_n$ dans le cas $\mathrm{E} = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.

Pour l'étude des séries, on introduit les sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} x_k$

5.1.3.1 Définition

Definition 5.4.

La ***suite*** (x_n) ***converge*** [a] ***vers un élément*** a *de* E*, si la suite numérique* $(\| x_n - a \|)$ *converge vers 0.*

[a] on précisera dans $(\mathrm{E}, \| \|)$, s'il peut y avoir ambiguïté sur le choix de la norme, par exemple si plusieurs normes ont été définies sur E

Rappel
Cette condition s'écrit sous forme quantifiée :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad / \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \| x_n - a \| < \varepsilon.$$

Proposition 15. *unicité de la limite*

Si la suite (x_n) *converge vers un élément* a *de* E*, cet élément est défini de manière unique et est appelé la limite de la suite* (x_n)*.*

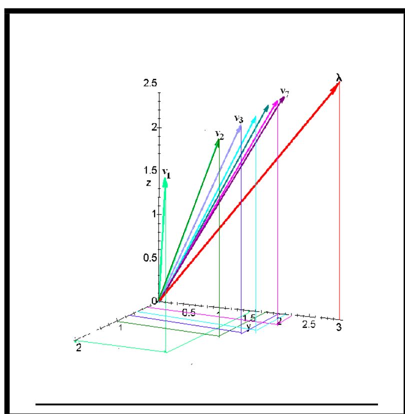
Notation : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ démonstration en cours

Exemple 5.1.1.
$(\mathrm{E}, \| \|) = (\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \| \quad \|_1)$. $1 \leq n$ f_n définie par $x \mapsto f_n(x) = 1 + x^n$.
Montrons que (f_n) converge vers la fonction constante 1.
En effet, $\| f_n - 1 \|_1 = \frac{1}{n+1}$ et la suite numérique $(\frac{1}{n+1})$ converge vers 0.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exemple 5.1.2.

$$V^{[n]} = (v_1^{[n]}, v_2^{[n]}, v_3^{[n]}) = (\frac{1}{n}, \frac{3(n+2)}{n+5}, (\frac{1+n}{n})^n)$$



$(V^{[n]})$ converge vers (0,3,e) dans $(\mathbb{R}^3, \| \|_1)$ car $|v_1^{[n]}| + |v_2^{[n]} - 3| + |v_3^{[n]} - e|$ tend vers 0.
- Nous verrons que cette propriété ne dépend pas du choix de la norme sur $\mathbb{R}^3$
- Nous verrons, dans la proposition (21), que pour obtenir ce résultat il suffit d'étudier chacune des suites de cordonnées séparément.

Proposition 16.
Si la suite (x_n) converge vers a dans $(\mathrm{E}, \| \|)$, alors la suite $(\|x_n\|)$ converge vers $\|a\|$ dans $(\mathbb{R}, | |)$.

Definition 5.5.

*La **série** $\sum x_n$ **converge**[a] si la suite des sommes partielles (S_n) converge. La limite S de la suite (S_n) est alors appelée la **somme de la série** et notée $\sum_{k=0}^{k=+\infty} x_k$.*

[a] on précisera dans $(\mathrm{E}, \| \|)$, s'il peut y avoir ambiguïté sur le choix de la norme, par exemple si plusieurs normes ont été définies sur E

Proposition 17.

*Une suite (x_n) indexée sur $\mathbb{N}$ converge si et seulement si la **série des différences** associée, $\sum y_n$, indexée sur $\mathbb{N}^*$ et définie par $y_n = x_n - x_{n-1}$, converge.*
(x_n) a alors pour limite $\sum_{k=0}^{k=+\infty} y_k + x_0$.

5.1.3.2 Propriétés

données
$(\mathrm{E}, \| \|)$ espace vectoriel normé.
Des suites (x_n) et (y_n) de vecteurs de E, un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Proposition 18. *Combinaison linéaire de suites vectorielles convergentes*
Si les suites (x_n) *et* (y_n) *convergent respectivement vers* a *et* b *alors :*

1. *la suite* $(x_n + y_n)$ *converge vers le vecteur* $a + b$*.*
2. *Pour tout scalaire* λ*, la suite* (λx_n) *converge vers le vecteur* λa*.*

Proposition 19. *Combinaison linéaire de séries vectorielles convergentes*
Si les séries $\sum x_n$ *et* $\sum y_n$ *convergent alors :*

1. *la série* $\sum x_n + y_n$ *converge et* $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=+\infty} (x_k + y_k) = \sum_{k=0}^{k=+\infty} x_k + \sum_{k=0}^{k=+\infty} y_k$*.*
2. *La série* $\sum \lambda x_n$ *converge et* $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=+\infty} (\lambda x_k) = \lambda \sum_{k=0}^{k=+\infty} (x_k)$*.*

démonstration en cours

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

5.1.4 Complétude d'un espace vectoriel normé

données
(E, $\| \|$) espace vectoriel normé,
(x_n) une suite d'éléments de E

Definition 5.6.

*La suite (x_n) est une **suite de Cauchy**[a] si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \quad (q > p > N'_\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \| x_q - x_p \| < \varepsilon$$

[a] on précisera dans (E, $\| \|$), s'il peut y avoir ambiguïté sur le choix de la norme, par exemple si plusieurs normes ont été définies sur E

Théorème 5.1.

Toute suite convergente est de Cauchy.

démonstration en cours

Definition 5.7.

*Un **espace vectoriel normé** (E, $\| \|$) est **complet** si toute suite de Cauchy converge.*[a]

[a] Dans un evn complet la réciproque du théorème (5.1) est vraie.

Remarque 5.1.2. Ce théorème permet de prouver l'existence d'une limite sans en connaître la valeur à l'avance.

Exemple 5.1.3. La suite (f_n) définie par $x \in [-1, 1] \quad \mapsto f_n(x) = \sqrt[2n+1]{x}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}[-1, 1]$ muni de la norme $\| \|_1$. Cette suite ne converge pas dans $\mathcal{C}[-1, 1]$ muni de la norme $\| \|_1$. $\mathcal{C}[-1, 1], \| \|_1$ n'est pas un espace complet.

Definition 5.8.

*La **série** $\sum x_n$ **converge absolument** si la série numérique $\sum \|x_n\|$ converge.*

Théorème 5.2. *absolue convergence et complétude*

Un espace vectoriel normé (E, $\| \|$) est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente. On a alors

$$\| \sum_{n=0}^{n=+\infty} x_n \| \leq \sum_{n=0}^{n=+\infty} \|x_n\|$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exemple de référence 5.3.

1. $(\mathbb{R}, | \, |)$, $(\mathbb{C}, | \, |)$ *sont des espaces vectoriels normés complets.*
2. $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \| \, \|_\infty)$ *est complet*[a]
3. Tout espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \| \, \|)$ *de dimension finie est complet indépendamment du choix de* $\| \, \|$[b]
4. En particulier $(\mathbb{K}^n, \| \, \|_2)$, $(\mathbb{K}^n, \| \, \|_1)$, $(\mathbb{K}^n, \| \, \|_\infty)$ *sont des espaces vectoriels normés complets.*

[a]Voir le cours du premier semestre "suites de fonctions".
[b] Nous serions en mesure de prouver ce résultat qui fera l'objet d'un théorème à la fin de ce cours.

Attention
Nous verrons en exercice que $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \| \, \|_1)$ et $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \| \, \|_2)$ ne sont pas complets.

Definition 5.9.

Un sous-ensemble A *de* E *est un* ***fermé*** *de* $(\mathrm{E}, \| \, \|)$ *si la limite de toute suite d'éléments de* A *qui converge dans* $(\mathrm{E}, \| \, \|)$ *appartient à* A *.*

Remarque 5.1.3.
Un sous-ensemble fermé d'un espace complet vérifie donc la propriété de complétude au sens où toute suite de Cauchy de cet ensemble converge dans cet ensemble.

Definition 5.10.

On appelle ***boule fermée*** *de centre c et de rayon r, le sous-ensemble de* E *noté* $\overline{B}_{c,r}$ *défini par* $\overline{B}_{c,r} = \{u \in \mathrm{E} / \| c - u \| \leq r\}$.

Exemple de référence 5.4.

E *et* $\emptyset$ *sont des fermés de* $(\mathrm{E}, \| \, \|)$.
Tout singleton $\{a\}$ *où* $a \in \mathrm{E}$ *est un fermé de* $(\mathrm{E}, \| \, \|)$.
Toute boule fermée de $(\mathrm{E}, \| \, \|)$ *est un fermé de* $(\mathrm{E}, \| \, \|)$.
Tout segment $[a,b]$ *de* $\mathbb{R}$ *est un fermé de* $(\mathbb{R}, | \, |)$.
$[a, +\infty[$ *où a est un réel quelconque est un fermé de* $(\mathbb{R}, | \, |)$.

démonstration. Tout singleton $\{a\}$ est fermé car toute suite constante égale à a converge vers a.
Toute suite (x_n) de $(\mathrm{E}, \| \, \|)$ qui appartient à la boule fermée $\overline{B}_{c,r}$ vérifie selon la définition précédente $\| x_n - c \| \leq r$, si elle converge vers a :

$$\| a - c \| \leq \| a - x_n \| + \| x_n - c \| \leq \| a - x_n \| + r,$$

lorsque n tend vers $+\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \| a - x_n \| = 0$, le principe de prolongement des inégalités par passage à la limite donne $\| a - c \| \leq r$. $\square$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exemple 5.1.4.
Montrer que la suite récurrente (x_n) définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = f(x_n) = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$ converge vers $\sqrt{2}$
On vérifie que cette suite est à valeurs dans $[1, 2]$:

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1 \quad \text{et} \quad 1 \leq \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \leq 2.$$

La série des différences $\sum y_n$ où $y_n = x_n - x_{n-1}$ converge absolument. En effet, selon le théorème des accroissements finis :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists c \in [1, 2] \quad / \quad y_n = f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) = f'(c)y_{n-1}$$

$$f'(c) = \frac{1}{2} - \frac{1}{c^2} \quad \text{et} \quad c \in [1, 2] \Rightarrow \quad |f'(c)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{d'où} \quad |y_n| \leq \frac{1}{2}|y_{n-1}|$$

et par récurrence il vient $|y_n| \leq \frac{2}{2^n}|y_1|$. La suite (x_n) converge donc vers une limite a qui appartient nécessairement au fermé $[0, 1]$.
f étant continue la suite de réels $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$, a vérifie donc $f(a) = a$ soit ici $\frac{x}{2} = \frac{1}{x}$ et $x^2 = 2$.
Avec Maple, on obtient les 7 premiers termes de cette suite à valeur dans $\mathbb{Q}$. Au passage vous connaissez tous le raisonnement par l'absurde qui permet d'établir que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.Vous devez savoir que $(\mathbb{Q}, |\,|)$ n'est pas complet. :

```
> x[0]:=1; for n from 0 to 10 do x[n+1]
> :=f(x[n]) od;
```

$$x_0 := 1$$
$$x_1 := 3/2$$
$$x_2 := \frac{17}{12}$$
$$x_3 := \frac{577}{408}$$
$$x_4 := \frac{665857}{470832}$$
$$x_5 := \frac{886731088897}{627013566048}$$
$$x_6 := \frac{1572584048032918633353217}{1111984844349868137938112}$$

Avec Maple on obtient les six premiers termes de la série des différences, écrits sous forme décimale :

```
> for n from 0 to 10 do  y[n+1]
> :=evalf((x[n+1]-x[n]))od;
```


© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
y_1 &:= 0.5000000000 \\
y_2 &:= -0.08333333333 \\
y_3 &:= -0.002450980392 \\
y_4 &:= -0.000002123899820 \\
y_5 &:= -1.594861825 \times 10^{-12} \\
y_6 &:= -8.992928322 \times 10^{-25}
\end{aligned}
$$

Cette méthode où l'on majore les normes des termes de la série des différences par une série géométrique de raison inférieur à 1, est celle de la démonstration du théorème du point fixe que nous allons aborder. Nous reprendrons en exercice (5.16) l'étude de la suite (x_n) afin de comprendre pourquoi cette suite converge aussi rapidement vers $\sqrt{2}$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

5.1.5 Théorème du point fixe

données
$(\mathrm{E}, \| \|_E)$, $(\mathrm{F}, \| \|_F)$ espaces vectoriels normés
A sous-ensemble de E.
φ application de A dans F.

5.1.5.1 Définitions

Definition 5.11.

*L'application φ est **lipschitzienne de rapport k** sur A de $(\mathrm{E}, \| \|_E)$ dans $(\mathrm{F}, \| \|_F)$ s'il existe un réel k strictement positif tel que :*

$$\forall x \in \mathrm{A} \quad \forall y \in \mathrm{A} \qquad \| \varphi(x) - \varphi(y) \|_F \leq k \| x - y \|_E$$

*Si φ est lipschitzienne de rapport k sur A et si k est strictement inférieur à 1, nous dirons que φ est une **application contractante de rapport k** sur A de $(\mathrm{E}, \| \|_E)$ dans $(\mathrm{F}, \| \|_F)$.*

Exemple 5.1.5.
De $(\mathbb{R}, | |)$ dans $(\mathbb{R}, | |)$,$(x \mapsto \sin x)$ est lipschitzienne de rapport 1 puisque par application du théorème des accroissements finis appliqué sur le segment I d'extrémités x et y à la fonction sinus de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \exists c \in I \, |\sin x - \sin y| = |(x-y) \cos c| \Rightarrow |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

mais sinus n'est pas contractante. Par contre $(x \mapsto \frac{1}{2} \sin x)$ est contractante de rapport $\frac{1}{2}$.

Exemple de référence 5.5.

L'application $(x \mapsto \| x \|)_E$ de $(\mathrm{E}, \| \|_E)$ dans $(\mathbb{R}, | |)$ est 1-lipschitzienne.

démonstration seconde inégalité du triangle

Definition 5.12.

*Si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$, un élément a de E est **point fixe** de φ si $\varphi(a) = a$*

5.1.5.2 Application contractante sur E

données
$(\mathrm{E}, \| \|_E)$ espace vectoriel normé
φ application de E dans E..

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

5.1.5.3 Théorème

Théorème 5.3. *théorème du point fixe : forme globale*

Soit φ une application de E ***dans*** E*, si φ est* ***contractante*** *de l'espace vectoriel normé* $(\mathrm{E}, \| \|_E)$ *dans lui-même et si* $(\mathrm{E}, \| \|_E)$ *est* ***complet****.*

1. *Alors φ admet un point fixe unique $a \in \mathrm{E}$.*
2. *Toute suite itérée (x_p) définie par $x_{p+1} = \varphi(x_p)$ converge vers a indépendamment du choix de l'élément initial x_0.*

démonstration

– Unicité du point fixe en cas d'existence
  - Si φ avait deux points fixes a et b alors :

$$\varphi(a) = a \quad et \quad \varphi(b) = b \Rightarrow \| \varphi(a) - \varphi(b) \| = \| a - b \|$$

  - φ étant contractante de rapport k

$$\| \varphi(a) - \varphi(b) \| \leq k \| a - b \| \quad avec \quad k < 1$$

  - a et b étant distincts :

$$0 < \| a - b \| \quad et \quad k < 1 \Rightarrow k \| a - b \| < \| a - b \|$$

  - d'où la contradiction

$$\| \varphi(a) - \varphi(b) \| = \| a - b \| \leq k \| a - b \| < \| a - b \|$$

– Existence du point fixe par la méthode des approximations successives
  - Prenons un élément quelconque de E, x_0, et définissons la suite itérée (x_p) à partir de x_0 comme élément initial.

$$x_1 = \varphi(x_0) \ldots \quad \forall n \geq 0 \quad x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

Montrons que cette suite converge, en introduisant la série des différences associée :

$$y_1 = x_1 - x_0 \ldots \quad \forall n \geq 1 \quad y_n = x_n - x_{n-1}$$

φ étant contractante de rapport k

$$\| x_n - x_{n-1} \| \leq k \| x_{n-1} - x_{n-2} \| \Rightarrow \| y_n \| \leq k \| y_{n-1} \| \leq k^{n-1} \| y_1 \|$$

La série $\sum y_n$ converge absolument et l'espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \| \|)$ étant complet, cette série converge, il en est de. même de la suite (x_n) qui converge vers un élément a

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

– Nous montrons que la limite a est point fixe de φ en majorant :

$$\| a - \varphi(a) \| \leq \cdots$$

[1] ...

Attention
L'hypothèse f 1-lipschitzienne[2] ne suffit pas puisque :
- L'identité est une application 1-lipschitzienne et admet tout point pour point fixe.
- Une translation ($x \mapsto x + x_0$) est une application 1-lipschitzienne et n'admet aucun point fixe.

5.1.5.4 Majoration de l'erreur

Théorème 6.3. *théorème du point fixe : majoration de l'erreur*

1. x_p est une valeur approchée de a, on sait majorer l'erreur c'est à dire la distance de x_p au point fixe a.

$$\forall p \in \mathbb{N}, \| x_p - a \| \leq \frac{k^p}{1-k} \| x_1 - x_0 \| .$$

2. Si on connaît le point fixe a, l'erreur entre le $p^{\text{ième}}$ terme de la suite itérée (x_p) et le point fixe a est majorée par :

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad \| x_p - a \| \leq k^p \| x_0 - a \| .$$

démonstration.

1. $\| \sum_{n=p+1}^{+\infty} y_n \| \leq \sum_{n=p+1}^{+\infty} \|y_n\| \leq \frac{k^p}{1-k} \| x_1 - x_0 \| .$
2. La propriété est vraie si p=0 , montrons qu'elle est vérifiée par récurrence supposons établi :

$$\| x_p - a \| \leq k^p \| x_0 - a \|$$

alors $x_{p+1} = \varphi(x_p)$ et $a = \varphi(a)$, φ étant contractante :

$$\| x_{p+1} - a \| \leq k \| x_p - a \|$$

[1] Nous pourrions montrer que $a = \varphi(a)$ en utilisant la continuité de f. Mais nous avons choisi dans cette première partie de travailler uniquement avec la notion d'application contractante et la notion de suite.

[2] C'est à dire : $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \| f(x) - f(y) \|_E \leq \| x - y \|_E$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

et :

$$\| x_p - a \| \leq k^p \| x_0 - a \| \Rightarrow \| x_{p+1} - a \| \leq k^{p+1} \| x_0 - a \|$$

□

5.1.5.5 Contraction sur une partie fermée et stable de E

Nous nous donnons un espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \| \|_E)$ et A un sous-ensemble de E. φ application de A dans E.
Si φ n'est pas définie et contractante sur $(\mathrm{E}, \| \|_E)$, mais seulement sur un sous-ensemble A de E.

Definition 5.13.

Le sous-ensemble A *de E* ***stable*** *par* φ *si* $\varphi(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}$

Théorème 6.3. *théorème du point fixe : sur une partie de* E

Si $(\mathrm{E}, \| \|_E)$ est un espace vectoriel normé **complet**, si A est un sous-ensemble **fermé** de $(\mathrm{E}, \| \|_E)$ **stable par** φ et si φ est **contractante** sur A de $(\mathrm{E}, \| \|_E)$ dans $(\mathrm{E}, \| \|_E)$ alors :

1. φ admet un point fixe unique $a \in \mathrm{A}$.
2. Toute suite itérée (x_p) définie par $x_{p+1} = \varphi(x_p)$ converge vers a indépendamment du choix de l'élément initial x_0 **dans A**.

démonstration en cours

Attention
A fermé est nécessaire ainsi dans l'espace vectoriel normé complet $(\mathbb{R}, | |)$ l'application $\varphi(x \mapsto \frac{x}{2})$ est contractante sur $(\mathbb{R}, | |)$ et envoie $\mathrm{A} =]0, 1]$ dans A. Cependant φ n'admet pas de point fixe dans A.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

5.1.6 Normes équivalentes

Nous nous donnons un espace vectoriel E et deux normes sur E, $(x \mapsto \| x \|)$ et $(x \mapsto N(x))$.

Nous avons supposé l'espace vectoriel E muni d'une norme donnée, lorsqu'nous introduisons une autre norme sur E que se passe-t-il ? une suite convergente pour une norme, l'est-elle pour une autre ? une série convergente pour une norme, l'est-elle pour une autre ?
Nous commençons par caractériser une relation entre deux normes qui laissent ces propriétés invariantes. Nous verrons ensuite que cette relation est toujours vérifiée en dimension finie, elle ne l'est pas nécessairement en dimension infinie.

Definition 5.14.

*Les **normes** $\| \|$ et N définies sur E sont **équivalentes** s'il existe des réels strictement positifs α et β tels que :*

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \alpha N(x) \leq \| x \| \leq \beta N(x).$$

Remarque 5.1.4. Cette relation est bien une relation d'équivalence, en effet, elle est réflexive, symétrique et transitive.

Proposition 20. *équivalence des normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$*
Les normes $\| \|_1, \quad \| \|_2$ et $\| \|_\infty$ définies sur $\mathbb{K}^n$ vérifient les relations :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^n & \| x \|_\infty \leq \| x \|_2 \leq \sqrt{n} \| x \|_\infty . \\ \forall x \in \mathbb{R}^n & \| x \|_\infty \leq \| x \|_1 \leq n \| x \|_\infty . \end{cases}$$

Nous admettons ce théorème qui pourrait être établi à l'aide du théorème (5.10).

Théorème 5.4. *équivalence en dimension finie*

*Deux normes quelconques définies sur un espace de dimension **finie** sont équivalentes.*

Théorème 5.5. *changement de norme équivalente*

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

1. La convergence et la limite d'une suite ainsi que la notion de suite de Cauchy sont conservées par changement de norme équivalente.
2. La convergence et l'absolue convergence d'une série sont conservées par changement de norme équivalente.
3. La complétude est conservée par changement de norme équivalente.
4. La lipschitzité d'une application est conservée par changement de norme équivalente.

démonstration en cours
Dans $\mathbb{K}^p$ comme dans tout espace vectoriel de dimension finie, nous parlerons de suite convergente, de série convergente, d'application lipschitzienne sans préciser de norme. Vous pouvez par contre choisir la norme la mieux adaptée au problème étudiée ou utiliser les coordonnées comme le montre la proposition très importante qui suit[1].

Proposition 21. *convergence et coordonnées*

Une suite $(x^{[n]})$ *d'éléments de* $\mathbb{K}^p$ [2] *converge vers* a *si et seulement si chacune des suites coordonnées* $(x_i^{[n]})\quad 1 \leq i \leq p$ *converge vers* a_i.

démonstration.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x^{[n]} - a\|_1 \leq \sum_{1 \leq i \leq p} \mid x_i^{[n]} - a_i \mid$$

et chacune des suites $(\mid x_i^{[n]} - a_i \mid)$ tend vers 0.□

Remarque 5.1.5. *Changement de normes et point fixe.*
Bien entendu, l'existence d'une solution de l'équation $f(x) = x$ est indépendante du choix d'une norme sur E. Par contre la possibilité d'appliquer le théorème du point fixe pour établir ce résultat peut dépendre du choix d'une norme. Si E n'est pas de dimension finie, il faut choisir une norme qui rende l'espace complet et l'application contractante. Attention car la notion d'application contractante n'est pas conservée par changement de norme équivalente.

[1]Nous ne lui donnons pas le nom de théorème car vous la retiendrez naturellement et l'utiliserez constamment

[2]ou d'un espace vectoriel E rapporté à une base $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

5.2 COURS PARTIE 2

5.2.1 Introduction

Les notions d'espaces complets et d'applications contractantes ont permis d'introduire le théorème du point fixe. La notion de boule de centre a et de rayon r permet de généraliser la définition de la continuité vue en première année au cas d'applications définies sur un espace vectoriel normé à valeurs dans un espace vectoriel normé. Nous donnons donc conformément au programme la définition abstraite, en termes de quantificateurs, de la continuité dans un espace vectoriel normé, écriture qui généralise la définition, déjà connue, pour les applications numériques d'une variable réelle.

Cependant nous privilégions une approche la caractérisation séquentielle de la continuité.

Nous abordons les notions topologiques, issues de "l'analysis situs", de "sous-ensemble fermé", déjà caractérisée séquentiellement dans la première partie de ce cours, et, celle de "sous-ensemble ouvert" utilisée en calcul différentiel des fonctions de plusieurs variables. Tout en sachant que la plupart des fermés et des ouverts utilisés dans ce cours sont définis comme images réciproques d'intervalles fermés (resp. ouverts) par une application continue.

Nous ne définissons pas la notion de compacité mais nous admettons que l'image, par une application continue, d'un sous-ensemble fermé borné d'un espace vectoriel normé de dimension finie est un fermé borné, résultat qui permettrait de montrer un des théorèmes fondamentaux de ce cours : l'équivalence des normes sur un espace vectoriel de dimension finie.[1]

Nous abordons enfin les normes matricielles.

5.2.2 Continuité

données
(E, $\| \|_E$) , (F, $\| \|_F$) et (G, $\| \|_G$). espaces vectoriels normés.
A une partie de E.
f application de A dans F.
$a \in$ A

[1]Nous avons introduit ce théorème sans le démontrer dès le début du cours afin de donner d'emblée les résultats et les notations simples qui en découlent en dimension finie.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

5.2.2.1 Définitions

Definition 5.15. ***Ecriture séquentielle.***

*f est **continue**, de $(\mathrm{E}, \| \|_E)$ dans $(\mathrm{F}, \| \|_F)$ en un point a de son ensemble de définition, A, si l'image de toute suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers a dans $(\mathrm{E}, \| \|_E)$, est une suite $(f(x_n))$ qui converge vers $f(a)$ dans $(\mathrm{F}, \| \|_F)$.*

Remarque 5.2.1.
Remarquer enfin que dans le continuité de f en a dépend de chacune des normes $\| \|_E$, $\| \|_F$, et de l'ensemble de définition A[1].

Cependant la propriété suivante explique pourquoi vous n'avez jamais parlé de continuité pour une norme donnée.

Proposition 22.
1. La continuité de f en a est indépendante du choix d'une norme équivalente à la norme donnée sur E ou sur F.
2. En particulier si E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie, la notion de continuité de f en a est intrinséque[2].

L'étude des applications vectorielles, c'est à dire de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel de dimension finie, ne soulèvent pas de grandes difficultés puisqu'il suffit d'étudier les applications coordonnées. C'est ce que montre l'énoncé suivant concernant la continuité.

Proposition 23.
Si F est de dimension finie rapporté à une base $(e_1, \cdots, e_p)$, la continuité en a de f, définie par $f(x) = \sum_{i=1}^{i=p} f_i(x) e_i$, équivaut à la continuité de chacune des applications coordonnées f_i où $1 \leq i \leq p$.

Definition 5.16.

*On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r, le sous-ensemble de E noté $B_{a,r}$ défini par :*

$$B_{a,r} = \{u \in \mathrm{E} / \| a - u \|_E < r\}.$$

Definition 5.17. ***Ecriture quantifiée de la continuité.***

Cette définition équivaut à :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha_{\varepsilon,a} > 0 \,/\, \forall x \in A \quad \| x - a \|_E < \alpha_{\varepsilon,a} \Rightarrow \| f(x) - f(a) \|_F < \varepsilon. \tag{5.1}$$

[1] C'est une notion que nous laissons volontairement de côté dans cette première approche

[2] au sens où elle ne dépend pas des normes choisies

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

La définition quantifiée de la continuité traduit le fait que, pour toute valeur de ε, on peut trouver un réel positif α tel que l'image d'un élément x de A qui appartient à la boule ouverte de centre a et de rayon α est dans la boule ouverte de centre $f(a)$ et de rayon ε.
Si l'étude des applications à valeurs dans un espace de dimension finie se ramène à l'étude des coordonnées, ce n'est pas le cas des applications définies sur un espace de dimension finie, même s'il s'agit tout simplement de $\mathbb{R}^2$. Voici quelques techniques d'étude.

Exemple 5.2.1.
f est définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, |\,|)$ par :

$$x = (x_1, x_2) \mapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si} \quad (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{si} \quad (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas continue en $a = (0, 0)$.
On peut choisir de travailler avec $\|\,\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et la valeur absolue sur $\mathbb{R}$.
Démonstration utilisant la définition séquentielle[1]
Notons (x_n) la suite de $\mathbb{R}^2$ définie par $x_n = (n^{-1}, n^{-1})$. Selon la propriété (21), elle tend vers $a = (0, 0)$ puisque les suites coordonnées, chacune égales à (n^{-1}), tendent vers 0. Or la suite $(f(x_n))$ est une suite de nombres réels constante égale à $\dfrac{1}{2}$. La suite $(f(x_n))$ ne converge pas vers $f(a) = 0$.

Exemple 5.2.2.
f est définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$x = (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si} \quad (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{si} \quad (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f est continue en $a = (0, 0)$.
On va choisir ici de travailler sur $\mathbb{R}^2$ avec la norme $\|\,\|_\infty$[2]. Nous reprendrons cet exemple avec la norme $\|\,\|_2$ dans un exemple d'étude de limite (5.2.6).
Montrons tout d'abord que $|f(x_1, x_2)| \leq |x_2|$:

---

[1] **deuxième solution** En utilisant la définition (5.2). choisissant $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$, nous avons $\exists \varepsilon > 0$, pour tout $\alpha > 0$ $x = (\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\alpha}{2})$ vérifie $\begin{cases} \|x - a\|_\infty = \dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow \|x - a\|_\infty < \alpha \\ f(x) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow |f(x) - f(a)| > \varepsilon. \end{cases}$

[2] on travaille toujours avec la valeur absolue sur $\mathbb{R}$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$$\begin{cases} x \neq a \Longrightarrow \dfrac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2} \leq 1 \quad \text{et} \quad |f(x)| \leq |x_2| \\ x = a \Longrightarrow |f(x)| = 0 \quad \text{et} \quad |f(x)| \leq |x_2| \end{cases}$$

Soit $(x^{[n]})$ une suite qui converge vers a, avec $x^{[n]} = (x_1^{[n]}, x_2^{[n]})$, on a :

$$|f(x^{[n]}) - f(a)| \leq |x_2^{[n]}| \leq \|x^{[n]} - a\|_\infty$$

$(\|x^{[n]} - a\|_\infty)$ converge vers 0, donc $(|f(x^{[n]}) - f(a)|)$ converge vers 0.
Nous avons montré que $(f(x^{[n]}))$ tend vers $f(a)$ dès que $(x^{[n]})$ tend vers a.

Definition 5.18.

*f est **continue**[a] si f est continue en tout point a de son ensemble de définition A.*

[a] pour le choix de E, de $\| \|_E$ de F et de $\| \|_F$ fixées dans les données initiales

5.2.2.2 Exemples de référence

Théorème 5.6. *lipschitzité et continuité en dimension finie*

Tout application k-lipschitzienne de $(\mathrm{E}, \| \|_E)$ dans $(\mathrm{F}, \| \|_F)$, est continue de $(\mathrm{E}, \| \|_E)$ dans $(\mathrm{F}, \| \|_F)$.

Exemple de référence 5.6.

En conséquence $x \mapsto \| x \|_E$ est continue de $(\mathrm{E}, \| \|_E)$ dans $\mathbb{R}$[a].
Lorsque E est de dimension finie, toute norme est continue sur E.
Toute application constante est continue $(k = 0)$, toute application contractante est continue.
Toute isométrie $(k = 1)$ et en particulier l'application identique de $(\mathrm{E}, \| \|_E)$ dans $(\mathrm{E}, \| \|_E)$ est continue.

[a] exemple connu d'application lipschitzienne voir l'exemple de référence(5.5)

Théorème 6.6 *linéarité et continuité en dimension finie*

Si E est de dimension finie toute application linéaire de E dans F est lipschitzienne donc continue de $(\mathrm{E}, \| \|_E)$ dans $(\mathrm{F}, \| \|_F)$

démonstration.
Nous montrons qu'une telle application est lipschitzienne en utilisant successivement la linéarité de f et la sous-linéarité de $\| \|_F$. Si $(e_1, e_2, ..., e_p)$ est une

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

base de E et si $x = \sum_{i=1}^{i=p} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{i=p} y_i e_i$:

$$f(x) - f(y) = \sum_{i=1}^{i=p} (x_i - y_i) f(e_i) \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \sum_{i=1}^{i=p} |x_i - y_i| \|f(e_i)\|_F.$$

Nous obtenons :

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq \|x - y\|_\infty \sum_{i=1}^{i=p} \|f(e_i)\|_F \leq C\|x - y\|_\infty.$$

Soit $C = \sum_{i=1}^{i=p} \|f(e_i)\|_F$, f est C-lipchitzienne de $(\mathrm{E}, \| \|_\infty)$ dans $(\mathrm{F}, \| \|_F)$ donc continue. □

Exemple 5.2.3.
Vérifier que l'application φ de $\mathcal{C}([0,1])$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = f(0)$ est linéaire.
Montrer que de $(\mathcal{C}([0,1]), \| \|_1)$ dans $(\mathbb{R}, | |)$, φ n'est pas continue en l'application nulle en étudiant l'image par φ de la suite (f_n) définie par :

$$f_n(x) = 1 - nx \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \qquad f_n(x) = 0 \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1.$$

Réponse :
$\|f_n\|_1 = \dfrac{1}{2n}$, la suite $(\|f_n\|_1)$ tend vers 0_E, donc la suite (f_n) tend vers l'application nulle dans $(\mathrm{E} = \mathcal{C}([0,1]), \| \|_1)$.
Or $\varphi(0_E) = 0$ alors que $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \varphi(f_n) = 1$. La suite $(\varphi(f_n))$ ne converge pas vers $\varphi(0_E)$.

5.2.2.3 Opérations sur les applications et continuité

données
$(\mathrm{E}, \| \|_E)$, $(\mathrm{F}, \| \|_F)$ et $(\mathrm{G}, \| \|_G)$. espaces vectoriels normés.
$a \in$ A sous-ensemble de E.
f et g applications de A dans F.
λ application de A dans $\mathbb{R}$.
h application de $f(\mathrm{A})$ dans G.

Voici les propriétés qui lient les opérations sur les applications et la continuité en un point. Elles prolongent celles des fonctions numériques d'une variable réelle et permettront à partir de l'étude de quelques applications de référence de conclure à la continuité de la plupart des applications que vous manipulerez cette année.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Proposition 24. *Combinaison linéaire d'applications*
1. Si f et λ sont continues en a, alors λf est continue en a.
2. Si f et g sont continues en a alors toute combinaison linéaire $kf + g$ est continue en a.

Proposition 25. *Produit d'applications numériques* (F $= \mathbb{R}$)
Si f et g sont continues en a alors fg est continue en a.

Proposition 26. *Composition d'applications continues*
Si f est continue en a et si h est définie continue en $f(a)$ alors la composée hof est continue en a[1]

Definition 5.19.

L'application $x = (x_1, ...x_i..., x_n) \in \mathbb{K}^n \mapsto x_i \in \mathbb{K}$ est appelée la $i^{\text{ième}}$ ***projection****.*
Une application $x = (x_1, ...x_i..., x_n) \in \mathbb{K}^n \mapsto E(x) \in \mathbb{K}$ est un ***monôme de plusieurs variables*** *s'il existe des entiers naturels α_1,...,α_n tels que $E(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$*
Une application P de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ est un ***polynôme de plusieurs variables*** *si P s'écrit comme combinaison linéaire de tels monômes.*
Une fonction F de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ est une ***fraction rationnelle de plusieurs variables*** *si F s'écrit comme quotient de deux polynômes.*

Exemple de référence 5.7.

Les projections p_i de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ sont continues
Les polynômes de plusieurs variables de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ sont continues.
Les fonctions fractions rationnelles de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ sont continues[a]*.*

[a] en tout point leur ensemble de définition

démonstration. Les projections p_i sont linéaires donc continues de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$. On applique ensuite les théorèmes sur les opérations sur les applications continues. □

Exemple 5.2.4.
Les applications f et g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 3x_2$ et $g(x_1, x_2) = x_1^4 \cdot x_2^5$ sont continues car ce sont des applications polynômes des variables x_1 et x_2.

[1] respectivement de $(\mathrm{E}, \| \|_E)$ dans $(\mathrm{F}, \| \|_F)$, de $(\mathrm{F}, \| \|_F)$ dans $(\mathrm{G}, \| \|_G)$, de $(\mathrm{E}, \| \|_E)$ dans $(\mathrm{G}, \| \|_G)$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

5.2.2.4 Limite en un point adhérent à A

données
$(\mathrm{E}, \| \|_E)$, $(\mathrm{F}, \| \|_F)$ et $(\mathrm{G}, \| \|_G)$. espaces vectoriels normés.
A une partie de E.
f application de A dans F.

Nous devons d'abord définir en quels points a de E, la question "x élément de l'ensemble de définition A de f tend vers a" a un sens. Cette question a un sens dès qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a, c'est ce qu'on appelle un point adhérent à A. Dans le cas d'un intervalle borné de $\mathbb{R}$ les seuls point adhérents sont les bornes de l'intervalle ce qui fait que ce type de question n'était pas indispensable jusqu'à présent.

Definition 5.20.

Un point a de E*, est dit* ***adhérent*** *à A dans $(\mathrm{E}, \| \|)_E$, s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a dans $(\mathrm{E}, \| \|_E)$.*

Conséquence
Tout point a de A est adhérent à A, en effet la suite constante de terme général $x_n = a$ converge vers a dans $(E, \| \|)$.

Exemple 5.2.5.
$a = (\alpha, 0)$ est adhérent à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ dans $(\mathbb{R}^2, \| \|_1)$ car la suite de terme général $x_n = (\alpha, \frac{1}{n})$, selon la propriété (21), converge vers a dans $(\mathbb{R}^2, \| \|_1)$.

Conséquence
Un sous-ensemble A de E est fermé (définition 5.9) si et seulement si il contient chacun de ses points adhérents.

Definition 5.21. *caractérisation séquentielle de la limite*

f a pour limite ℓ en un point a adhérent à A si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers ℓ.

Proposition 27. *unicité de la limite*
Si f a une limite en a, cette limite est unique. Elle est notée $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

Exemple 5.2.6.
$a = (0, 0)$ et f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$x = (x_1, x_2) \neq a \mapsto f(x) = \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Montrer que f a une limite en a égale à 0. solution :
On va choisir de travailler sur $\mathbb{R}^2$ avec la norme $\| \|_2$
Si x est différent de a, notons $r = \|(x_1, x_2)\|_2$, alors nous savons qu'il existe un réel θ tel que $x_1 = r\cos\theta$ et $x_2 = r\sin\theta$ ainsi :

$$x \neq a \quad f(x) = \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} = r\cos^2\theta\sin\theta$$

Dire qu'une suite $(x^{[n]})$ tend vers a en étant différente de a signifie que la suite $(\|x^{[n]} - a\|_2) = r_n$ tend vers 0 or :

$$\mid f(x^{[n]} - f(a) \mid = r^n\cos^2\theta\sin\theta \Rightarrow \mid f(x^{[n]}) - f(a) \mid \leq r^n$$

La suite de réels positifs $(\mid f(x^{[n]}) - f(a) \mid)$, majorée par une suite qui tend vers 0, tend elle aussi vers 0 ce qui montre que $(f(x^{[n]}))$ tend vers 0 dès que $(x^{[n]})$ tend vers a. Soit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Comparez l'exemple ci-dessus à l'étude de continuité menée dans l'exemple (5.2.2). Dans l'étude de limite nous envisageons une suite qui tend vers a en ne prenant pas la valeur a. Dans l'étude de continuité les termes de la suite $(x^{[n]})$ peuvent prendre la valeur a. Nous avons commencé par l'étude de continuité car alors on se donne a priori la valeur de la limite (c'est f(a)) et on évite la difficulté supplémentaire des points adhérents. Bien souvent le fait que les termes de la suite $(x^{[n]})$ peuvent prendre la valeur a ne change pas beaucoup les majorations.

Théorème 5.7. *Limite et prolongement par continuité]*

Si $a \in A$, f admet une limite en a, si et seulement si f est continue en a car la limite est nécessairement égale à $f(a)$.

Si a est adhérent à A, sans appartenir à A alors f admet pour limite ℓ en a si l'application $\tilde{f}$ définie sur $A \cup \{a\}$ par :

$$\begin{cases} x \neq a & \tilde{f}(x) = f(x) \\ x = a & \widetilde{f}(a) = \ell. \end{cases}$$

est continue en a. On note alors la limite $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$

et $\tilde{f}$ est appelée le prolongement par continuité de f en a.

Definition 5.22. *Ecriture quantifiée de la limite de f en a :*

f a pour limite ℓ en un point a adhérent à A signifie :

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\alpha_{\varepsilon,a} > 0 \quad / \quad \forall x \in A \quad \| x - a \|_E < \alpha_{\varepsilon,a} \quad \Rightarrow \quad \| f(x) - \ell \|_F < \varepsilon. \tag{5.2}$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exemple 5.2.7.
$(\mathrm{E}, \| \|) = (\mathbb{R}^2, \| \|_\infty), (\mathrm{F}, \| \|) = (\mathbb{R}, | |), A = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$
$x = (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \dfrac{x_2 x_1}{x_1^2 + x_2^2}$.
Vérifier que f n'a pas de limite en a.

solution
Selon la propriété (21), la suite de terme général $u_n = (n^{-1}, 0)$ converge vers a dans $(\mathbb{R}^2, \| \|_\infty)$ et la suite $(\mathrm{f}(\mathrm{u}_n))$, constante égale à 0, converge vers 0 dans $(\mathbb{R}, | |)$.
Toujours selon la propriété (21), la suite de terme général $v_n = (n^{-1}, n^{-1})$ converge vers a dans $(\mathbb{R}^2, \| \quad \|_\infty)$ et la suite constante $(f(v_n))$ converge vers $\dfrac{1}{2}$ dans $(\mathbb{R}, | |)$.
Donc f n'admet pas de limite en a.

5.2.2.5 Sous-ensembles fermés ouverts et continuité

On se donne un sous-ensemble A de l'espace vectoriel E qui est muni d'une norme $(\| \|_E)$.
$(\mathrm{F}, \| \|_F)$ et B un sous-ensemble de F.
f une application de E dans F.
L'image directe de A par f : $f(\mathrm{A}) = \{y \in \mathrm{F} / \exists x \in \mathrm{A} / y = f(x)\}$
L'image réciproque de B par f : $\overset{-1}{f}(\mathrm{B}) = \{x \in \mathrm{E} / f(x) \in \mathrm{B}\}$

Definition 5.23.
Un sous-ensemble A est ***ouvert*** *dans* $(\mathrm{E}, \| \|_E)$ *si son complémentaire est fermé dans* $(\mathrm{E}, \| \|_E)$

Proposition 28.
La notion d'ouvert ne dépend pas du choix d'une norme équivalente à une norme donnée

démonstration en cours

Théorème 5.8.
L'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé : si B *est un fermé de* $(\mathrm{F}, \| \|_F)$, $\overset{-1}{f}(\mathrm{B})$ *est un fermé de* $(\mathrm{E}, \| \|_E)$.
L'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert : si B *est un ouvert de* $(\mathrm{F}, \| \|_F)$, $\overset{-1}{f}(\mathrm{B})$ *est un ouvert de* $(\mathrm{E}, \| \|_E)$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exemple 5.2.8.
Montrer que $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x\}$ et $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 1\}$ sont des fermés de $(\mathbb{R}^2, \| \|_\infty)$

Réponse :
En effet $A_1 = \overset{-1}{p_1}([0, +\infty[)$, où la projection p_1 est continue donné dans l'exemple de référence(5.7) de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et où $[0, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$ donné dans l'exemple de référence(5.4).
$A_2 = \overset{-1}{f}(\{1\})$, où l'application f est une application polynôme des variables x et y donc est continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, donné dans l'exemple de référence (5.7), et où le singleton $\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ donné dans l'exemple de référence (5.4).
Nous nous proposons dans le chapitre suivant d'étudier le comportement d'une application définie au "voisinage" d'un point. Cette notion apparaît dans la caractérisation d'un ouvert qui suit :

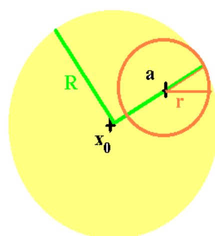
Théorème 5.9. [1]

A est un sous-ensemble ouvert s'il est vide ou si pour tout élément a de A, il existe une boule ouverte de centre a contenue dans A :

$$\forall a \in \mathrm{A} \qquad \exists r > 0 \qquad B(a,r) \subset \mathrm{A}.$$

Exemple de référence 5.8. *:*

Dans $\mathbb{R}$ tout intervalle ouvert $]a,b[$, $]a,\infty[$, $]-\infty,b[$ est un ouvert.
E et $\emptyset$ sont des ouverts de $(\mathrm{E}, \| \|_E)$.
Toute boule ouverte de $(\mathrm{E}, \| \|_E)$ est un sous-ensemble ouvert de $(\mathrm{E}, \| \|_E)$.



démonstration. Deux méthodes soit en utilisant le théorème de l'image réciproque appliqué à $x \in \mathrm{E} \mapsto \|x\|_E \in \mathbb{R}$ et à l'ouvert $]-\infty, R[$. Soit en utilisant le théorème (5.9) un élément de $B(x_0, R)$, nécessairement $|x_0 - a| < R$

[1]Cette notion peut avoir un rôle pratique important, par exemple, en optimisation dynamique : compte tenu des imprécisions, si l'ensemble $\mathcal{C}$ des états initiaux commandables d'un système dynamique n'est pas ouvert, ceux qui sont "à la frontière" de $\mathcal{C}$ sont irréalistes. (Faurre p. 110). De même si $a \in \mathrm{A}$ où A est ouvert, alors f est continue au point a si sa restriction à A est continue en a.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Montrons que la boule de centre a et de rayon $r = R - |x_0 - a|$ est incluse dans $B(x_0, R)$. Il faut établir que si x est un élément quelconque de $B(a, r)$...
□

5.2.2.6 Fermés bornés en dimension finie

On se donne deux espaces vectoriels normés $(\mathrm{E}, \| \|_E)$ et $(\mathrm{F}, \| \|_F)$ et A un sous-ensemble de E. f application de A dans F.

Definition 5.24.

A *est un* ***sous-ensemble borné*** *de* $(\mathrm{E}, \| \|)$, *si*

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in A \quad \| x \| \leq M.$$

La notion de borné ne dépend pas du choix d'une norme lorsque E est de dimension finie. Dans les autres cas, il faut là aussi préciser la norme choisie sur E.

Exemple 5.2.9.
La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où $f_n(x) = x^n$, est-elle bornée dans $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \| \quad \|_2)$?
solution : $0 < n \quad \| x^n \|_2 = \sqrt{\int_0^1 x^{2n} dx} = \sqrt{\dfrac{1}{2n+1}}$ et $\| x^n \|_2 \leq 1$

Remarque 5.2.2.
De $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $(x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \dfrac{1}{1+x^2})$ est continue.
$\mathrm{A} = [1, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$. $f(\mathrm{A}) =]0, 1]$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

Par contre vous savez que l'image d'un segment fermé borné par une application numérique continue est un fermé borné de $\mathbb{R}$. Ce résultat se généralise dans les espaces vectoriels de dimension finie. Nous admettons ce résultat, énoncé ci-après.

Théorème 5.10. *Image continue d'un "compact"*

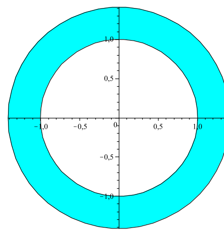
© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Si f est une application continue [a] *d'un espace vectoriel de* ***dimension finie*** E *dans* $(\mathrm{F}, \| \|_F)$ *l'image,* $f(\mathrm{A})$*, d'un sous-ensemble* ***fermé borné*** A *par* f *est un fermé borné de* $(\mathrm{F}, \| \|_F)$
Lorsque $\mathrm{F} = \mathbb{R}$*, l'image,* $f(\mathrm{A})$*, d'un* ***fermé borné*** A *a donc un minimum* $m = f(a)$ *et un maximum* $M = f(b)$*, ce qui s'écrit :*

$$\exists (a, b) \in \mathbf{A} \times \mathrm{A} / \forall x \in \mathrm{A} \quad f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

[a] E étant de dimension finie, il n'est pas nécessaire de préciser pour quelle norme sur E cette propriété est réalisée

Exemple 5.2.10. Montrer que la norme $\| \|_1$ admet un maximum M et un minimum m sur la couronne $\mathrm{A} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 \leq \|x\|_2 \leq 2\}$. Déterminer les valeurs de M et de m. Vérifier que chacun de ces nombres est atteint en plusieurs points de la couronne ?



solution :
Lorsque E est de dimension finie, nous savons[2] que toute norme est continue sur E. Ainsi les normes $\| \|_1$ et $\| \|_2$ sont continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

A est un fermé de $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque du segment $[1, 2]$, fermé de $\mathbb{R}$ par l'application continue $\| \|_2$. A est un borné de $\mathbb{R}^2$ car tout élément x de cette couronne vérifie $\|x\|_2 \leq 2$.
Remarquons que ce théorème d'existence, contrairement au théorème du point fixe ne donne pas de moyen de déterminer le maximum, ni une suite approximante. On note dans la suite $f(x) = \|x\|_1$
On montre que 1 est **le minimum** de f sur A en montrant que :

1. 1 est **un minorant** de f sur A, en effet :
   $\forall x \in \mathrm{A} \quad 1 \leq \|x\|_2^2 \Rightarrow 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq (|x_1| + |x_2|)^2 \Rightarrow 1 \leq f(x)$.
2. 1 est une **valeur atteinte** par f, puisque :
   $f(1, 0) = f(0, 1) = f(-1, 0) = 1$.

[2] selon l'exemple de référence (5.6)

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

De même on détermine le maximum de f sur A.

Nous admettons ici ce théorème, qui nécessite de préciser une notion de compacité et de montrer ainsi ce en quoi un sous-ensemble fermé borné d'un espace vectoriel de dimension finie prolonge la notion de segment d'extrémités a et b, noté $[a, b]$, étudié dans $\mathbb{R}$. Nous développons cette étude en annexe.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

5.2.3 Normes matricielles

5.2.3.1 Norme induite d'une application linéaire

Nous nous donnons deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de **dimension finie** : $\mathrm{E} = \mathbb{K}^n$, $\mathrm{F} = \mathbb{K}^p$ et notons $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications linéaires de E dans F, une norme $\| \, \|_E$ sur E et une norme $\| \, \|_F$ sur F.
Nous savons déja, selon le théorème (5.2.2.2), que toute application linéaire f de E dans F est lipschitzienne. De plus écrivant :

$$f(x) - f(y) = f(x-y) = \|x-y\|_E f(u) \qquad \text{où} \qquad u = \frac{x-y}{\|x-y\|}$$

nous vérifions qu'un réel k est une constante de lipschitz de f si et seulement si k majore $\{|f(u)| \, / \|u\|_E = 1\}$. Appliquons le théorème (5.10) :

Proposition 29.
L'application $(x \in \mathrm{E} \mapsto \|f(x)\|_F \in \mathbb{R}^+)$ *est continue et a donc un maximum sur le fermé borné* $S = \{x \in \mathrm{E} \, / \, \|x\|_E = 1\}$ *de* $\mathbb{R}^n$.

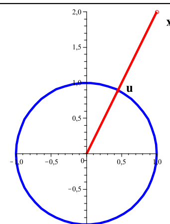
Definition 5.25.
Si E *est de dimension finie et* f *est une application linéaire de* $(\mathrm{E}, \|_E)$ *dans* $(\mathrm{F}, \|_F)$, *on appelle **norme induite** de f par le choix des normes* $\| \, \|_E$ ***et*** $\| \, \|_F$ *le réel positif* $\max\limits_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$, *noté* $||| \, f \, |||$.

Conséquence : $||| \, f \, |||$ est la plus petite constante de Lipschitz de f.

$$||| \, f \, ||| = \max_{x \in S} \|f(u)\|_F$$

$$x \neq 0_E \; u = \frac{x}{\|x\|_E} \Rightarrow ||| \, f \, ||| = \max_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

$$x \neq y \; u = \frac{x-y}{\|x-y\|_E} \Rightarrow ||| \, f \, ||| = \max_{(x,y) \in E^2 \, x \neq y} \frac{\|f(x-y)\|_F}{\|x-y\|_E}.$$



Théorème 5.11.

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leq ||| \, f \, ||| \cdot \|x\|_E.$$

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq ||| \, f \, ||| \cdot \|x-y\|_E.$$

Remarque 5.2.3.
Si $E = F$, f est contractante si et seulement si $||| \, f \, ||| < 1$.

Proposition 30.
L'application $(f \mapsto \max\limits_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F)$ *définit une norme sur* $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Proposition 31. ***norme d'algèbre***
Si f appartient à $\mathcal{L}(E,F)$ et si g appartient à $\mathcal{L}(F,G)$ et si l'on note de manière identique les normes sur $\mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{L}(F,G)$ et $\mathcal{L}(E,G)$ respectivement induites par la norme $\| \|_E$ sur E et la norme $\| \|_F$ sur F, la norme $\| \|_F$ sur F et la norme $\| \|_G$ sur G, la norme $\| \|_E$ sur E et la norme $\| \|_G$ sur G alors

$$||| gof ||| \leq ||| g ||| \quad ||| f |||$$

Une telle norme est appelée norme d'algèbre .

5.2.3.2 Norme induite d'une matrice

Nous considérons l'espace vectoriel, noté $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, constitué par l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ qui ont p lignes et n colonnes.

notations :
On note x, le vecteur de $\mathbb{K}^n$ de coordonnées $(x_1, x_2, ..., x_n)$, dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
et X, la matrice colonne des coordonnées de x dans la base canonique aini, ${}^tX = (x_1, x_2, ..., x_n)$. .

Definition 5.26.

*Toute matrice M de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ représente dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et de $\mathbb{K}^p$ une application linéaire f. La norme de f induite par les normes $\| \|_{\mathbb{K}^n}$ et $\| \|_{\mathbb{K}^p}$ est appelée la **norme** de la matrice M **induite** par les normes $\| \|_{\mathbb{K}^n}$ et $\| \|_{\mathbb{K}^p}$.*

notation $||| A |||$.

Definition 5.27.

Si M est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, les normes respectivement induites par les normes $\| \|_1$ sur $\mathbb{K}^p$ et sur $\mathbb{K}^n$, $\| \|_2$ sur $\mathbb{K}^p$ et sur $\mathbb{K}^n$ et $\| \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^p$ et sur $\mathbb{K}^n$ sont les normes notées $||| |||_1$ $||| |||_2$ et $||| |||_\infty$

Nous examinons d'abord le cas de la norme $||| |||_1$ qui s'obtient en faisant la somme des modules (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ou des valeurs absolues (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) des coefficients de chaque colonne et en prenant la plus grande de ces sommes. Puis celui de la norme $||| |||_\infty$ qui s'obtient de la même façon en partant des lignes. C'est ce qu'énonce cette propriété :

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Proposition 32.
Si M a pour coefficients (a_{ij}), $i \in [1,p]$ et $j \in [1,n]$, les normes[1] $|||\,|||_1$ *et* $|||\,|||_\infty$ *sont définies par :*

$$||| \ M \ |||_1 = \max_{j\in[1,n]} C_j{}^2 \quad où \quad C_j = \sum_{i\in[1,p]} |\ a_{ij}\ |$$
$$||| \ M \ |||_\infty = \max_{i\in[1,p]} L_i \quad où \quad L_i = \sum_{j\in[1,n]} |\ a_{ij}\ | \ .$$

démonstration.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{et} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$$

L'image de x par f est un vecteur y de $\mathbb{K}^p$ qui a pour i^{me} coordonnée dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$: $y_i = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}x_j$.
On cherche le maximum de $B = \{\|y\|_1 \,/\, y = f(x) \text{ où } \|x\|_1 = 1\}$
Montrons que $\max_{j\in[1,n]} C_j$ majore B :
Si $\sum_{j\in[1,n]} |\ x_j\ |= 1$ alors compte tenu de :

$$y_i = \sum_{j\in[1,n]} a_{ij}x_j.$$

Il vient :

$$\|y\|_1 = \sum_{i\in[1,p]} |\ y_i\ |= \sum_{i\in[1,p]} |\sum_{j\in[1,n]} a_{ij}x_j \ |\leq \sum_{i\in[1,p]}\sum_{j\in[1,n]} |\ a_{ij}\ ||\ x_j\ |$$

$$\sum_{i\in[1,p]}\sum_{j\in[1,n]} |\ a_{ij}\ ||\ x_j\ |= \sum_{j\in[1,n]} |\ x_j\ | \sum_{i\in[1,p]} |\ a_{ij}\ | \ .$$

$$\sum_{j\in[1,n]} |\ x_j\ | \sum_{i\in[1,p]} |\ a_{ij}\ |\leq= \sum_{j\in[1,n]} |\ x_j\ | \, C_j \leq \max_{j\in[1,n]} C_j \sum_{j\in[1,n]} |\ x_j\ |\leq \max_{j\in[1,n]} C_j.$$

Montrons que $\max_{j\in[1,n]} C_j \in B$: Soit j_0 tel que $\max_{j\in[1,n]} C_j = C_{j_0}$, on choisit $a_j = 0$ si $j \neq j_0$ et $a_j = 1$ si $j = j_0$. On vérifie $\|a\|_1 = 1$ et

[1] Une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ peut représenter une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ sur $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^p$ sur $\mathbb{C}^n$. Les normes induites, $|||\quad|||_1$ et $|||\quad|||_\infty$ dans l'un ou l'autre de ces cas coïncident.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

$b = f(a) = (a_{1j_0}, a_{1j_0}, \cdots, a_{pj_0})$ d'où $\|b\|_1 = C_{j_0}$.

Definition 5.28. *:*

On appelle ***spectre*** *d'une matrice carrée M d'ordre n et on note $Sp(M)$ le sous-ensemble $\{\lambda_i, 1 \leq i \leq n\}$ des valeurs propres réelles ou complexes de la matrice M.*
On appelle ***rayon spectral*** *de M le nombre noté $\rho(M)$ égal à $\max\limits_{1 \leq i \leq n} \mid \lambda_i \mid$*

Proposition 33.

$$\rho(M) \leq ||| M |||$$

Proposition 34.
La norme $||| \, |||_2$ est définie par :

$$||| M |||_2 = \sqrt{\rho({}^tMM)} \quad si \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

Montrons$||| M |||_2^2 = \rho({}^tMM)$
On suppose que M est une matrice à coefficients réels, qui définit un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dans dans $\mathbb{R}^p$ rapportés à la base canonique.

$$\frac{\|f(x)\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \frac{{}^t(MX)(MX)}{{}^tXX} = \frac{{}^tX{}^tMMX}{{}^tXX}.$$

${}^tMM$ est une matrice symétrique qui est donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres de $\mathbb{R}^n$ et de plus les valeurs propres de ${}^tMM$ sont positives.[1]. Si X est la matrice colonne des cordonnées de x dans la base canonique et X' celle des coordonnées de x dans la nouvelle base, $X = PX'$ avec ${}^tPP = I_n$, on a :

$${}^tX{}^tMMX = {}^tX'DX' \quad \text{et} \quad {}^tXX = {}^tX'X'$$

D'où si x est non nul :

$$\frac{{}^tX{}^tMMX}{{}^tXX} = \frac{{}^tX'DX'}{{}^tX'X'} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \mid \lambda_i \mid x_i^2}{\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2} \leq max_{i=1}^{i=n} \mid \lambda_i \mid .$$

On obtient l'égalité en prenant le vecteur propre de ${}^tMM$ de norme 1 qui a pour valeur propre $\rho({}^tMM)$. $\square$

[1] ${}^tMMX = \lambda X \Longrightarrow \|MX\|_2^2 = \lambda \|X\|^2$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

5.3 ANNEXE

5.3.1 Introduction

5.3.1.1 Résumé

Nous proposons ici, pour les très curieux, une définition[1] de la compacité[2], plus concrète que celle usuellement donnée, centrée autour de l'étude de l'image continue d'un compact, et finement liée au théorème d'optimisation 5.10. Cette étude permet de plus de démontrer le théorème d'équivalence des normes en dimension finie.

5.3.1.2 Définition

Dans tout ce paragraphe nous supposerons que E **est un espace vectoriel de dimension finie** sur $\mathbb{R}$. Cette étude permet de démontrer le théorème d'équivalence des normes en dimension finie.

Definition 5.29 (sous-ensemble compact).

Un sous-ensemble A non vide d'un espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \| \|)$ de dimension finie est dit compact si l'image de A par n'importe quelle application continue de A dans $(\mathbb{R}, | |)$ est un sous-ensemble borné de $(\mathbb{R}, | |)$[3].

On aurait pu prendre la condition $f(A)$ compact de $\mathbb{R}$, c'est à dire fermé borné de $\mathbb{R}$, si on suppose la compacité déjà étudiée sur $\mathbb{R}$.

Proposition 35.
Tout sous-ensemble compact de $(E, \| \|)$ est un sous-ensemble fermé et borné de $(E, \| \|)$. En particulier, toute partie compacte de $(E, \| \|)$ est complète.

Théorème 5.12.

Toute application continue définie sur un compact A de $(E, \| \|)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ possède un maximum et un minimum.

Proposition 36.
Si f est continue de $(E, \| \|)$ dans $(F, \| \|)$. L'image $f(A)$ d'un sous-ensemble compact A de $(E, \| \|)$ est un sous-ensemble compact de $(F, \| \|)$

[1] empruntée à Monsieur Warusfel

[2] que l'on peut voir comme une généralisation de la notion d'ensemble fini

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

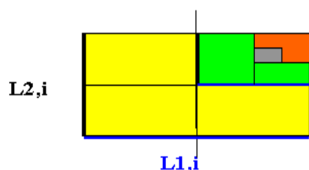
Conséquence :
En particulier, si A est une partie compacte de (E, $\| \|_E$) , et si f est continue de (E, $\| \|_E$) dans (F, $\| \|_F$), $f(A)$ est une partie fermée de (F, $\| \|_F$).

Théorème 5.13.

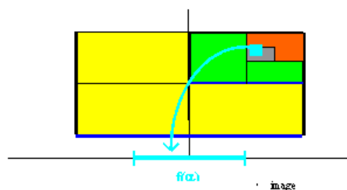
Les compacts de $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$ sont les sous-ensembles fermés bornés de $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$.

démonstration : Nous voulons montrer que si A est une partie fermée et bornée de $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$ alors A est compacte. Nous raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une application continue f de $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(A)$ soit non borné.

Première étape : *Nous construisons une suite (A_p) de sous-ensembles emboîtés telle que $A_1 = A$, A_p est inclus dans un pavé et sur chacun desquels f est non bornée.*
Deuxième étape : *Nous montrons que la suite décroissante des (A_p) converge vers un singleton $\{\alpha\}$ où α est un élément de A.*



Troisième étape : *La continuité de f en α implique que f est bornée sur un pavé T de centre α de rayon ε, ce qui contredit $f(A_p)$ non borné pour tout p.*



En conséquence :
$$f(A_P) \subset [f(\alpha) - 1, f(\alpha) + 1]$$
ce qui contredit f(T) borné.
Pour conclure : L'hypothèse f(A) non borné aboutit à une contradiction, en conséquence cette hypothèse ne peut être réalisée. Ce raisonnement par l'absurde montre que nécessairement f(A) est borné pour n'importe quelle application réelle continue de $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$ dans $\mathbb{R}$.
A est donc une partie compacte de $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

5.3.1.3 Equivalence des normes en dimension finie

Théorème 5.14.

Deux normes quelconques sur un espace vectoriel E de dimension finie sont équivalentes.

Théorème 5.15.

Si E *est un espace vectoriel normé de dimension finie, les compacts de l'espace vectoriel normé de* $(\mathrm{E}, \| \|)$ *sont les sous-ensembles fermés et bornés de* $(\mathrm{E}, \| \|)$.

Théorème 5.16.

Sur un espace vectoriel E de dimension finie.

1. *Les notions de borné et de suites de Cauchy sont indépendantes du choix d'une norme sur* E.
2. *La notion d'application continue de* E *dans* $(\mathrm{F}, \| \|_F)$ *est indépendante du choix d'une norme sur* E *et de celui de la norme sur* F *si* F *est de dimension finie.*
3. *Les notions topologiques d'ouvert, de fermé, de suites convergentes, de point adhérent, de compact sont indépendantes du choix d'une norme sur* E.

En conséquence, en dimension finie nous parlerons donc sans préciser le choix de la norme effectué de borné, de suite de Cauchy, de suite convergente, d'ouvert, de fermé, de point adhérent, de compact.

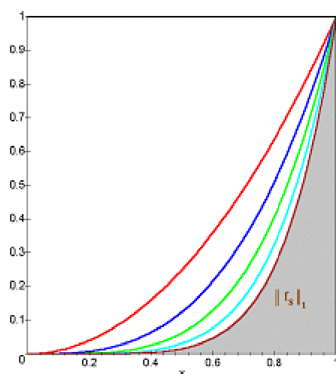
© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

5.4 EXERCICES

5.4.1 Espace vectoriel normé- Définitions - Suites convergentes dans un espace vectoriel normé

5.4.1.1 apprentissage du cours

Exercice 5.1. :



1. La suite d'applications (f_n) où $f_n(x) = x^n$ converge-elle simplement sur $[0,1]$? On se place désormais dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni des différentes normes définies en cours.
2. Calculer $\| f_n \|_\infty$ et $\| f_n \|_1$.
3. Que pouvez-vous dire de la suite (f_n) dans $(E, \| \|_\infty)$ puis dans $(E, \| \|_1)$?

Exercice 5.2.
Dessiner les boules unités, c'est à dire $\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / \ \| x \| \leq 1\}$ pour chacune des normes $\| \|_2$, $\| \|_1$ et $\| \|_\infty$.

Exercice 5.3.

1. Est-ce que que $f \mapsto \| f' \|_\infty$ définit une norme sur $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$?
2. Est-ce que que $f \mapsto \| f' \|_\infty + | \int_0^1 f(t)dt|$ définit une norme sur $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$?
3. Montrer que chacune des applications $f \longmapsto \| f \|_{\omega i}$ $1 \leq i \leq 3$ définies ci-après est une norme sur $\mathcal{C}^i([0,1],\mathbb{R})$

$$\| f \|_{\omega 1} = |f(0)| + \sup_{[0,1]} |f'(x)|$$

$$\| f \|_{\omega 2} = |f(0)| + |f'(0)| + \sup_{[0,1]} |f''(x)|$$

$$\| f \|_{\omega 3} = |f(0)| + |f'(0)| + |f''(0)| + \sup_{[0,1]} |f^{(3)}(x)|$$

Montrer que pour toute application f dans $\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}$

$$\| f \|_{\omega 1} \leq \| f \|_{\omega 2} \leq \| f \|_{\omega 3}$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exercice 5.4.
1. Soient $(\mathrm{F}, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé, montrer que si E est un espace vectoriel et f une application linéaire injective de E dans F alors on peut définir une norme N sur E par :

$$\mathrm{N}(x) = \| f(x) \|$$

2. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, on associe à tout polynôme P de coefficients a_p où $0 \leq p \leq n$ les réels $\nu_1(P)$, $\nu_2(P)$, $\nu_3(P)$, $\nu_4(P)$, $\nu_5(P)$, $\nu_6(P)$:

$$\nu_1(P) = \sup_{0 \leq p \leq n} |a_p| \qquad \nu_2(P) = \sum_{p=0}^{p=n} |a_p| \qquad \nu_1(P) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |P(t)|$$

$$\nu_4(P) = \int_0^1 |P(t)| dt \qquad \nu_5(P) = (\int_0^1 |P^2(t)| dt)^{\frac{1}{2}} \qquad \nu_6(P) = |P(0)| + \sup_{0 \leq t \leq 1} |P'(t)|$$

Montrer en utilisant la première question, les exemples de référence du cours et l'exercice précédent que chacune des applications ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, ν_5, ν_6 définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5.5.
Soient $f_n, n \in \mathbb{N}$ et f des applications continues de [0,+2] dans $\mathbb{R}$
Montrer que si la suite (f_n) converge dans $(\mathcal{C}([0,2], \mathbb{R}), \| \ \|_1)$ vers f, alors[1] la suite (f_n) converge dans $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \| \ \|_2)$ vers f.
Montrer que si la suite (f_n) converge dans $(\mathcal{C}([0,2], \mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$ vers application f, alors la suite (f_n) converge dans $(\mathcal{C}([0,2], \mathbb{R}), \| \ \|_1)$ vers f.
Montrer que si la suite (f_n) converge dans $(\mathcal{C}([0,2], \mathbb{R}), \| \ \|_2)$ vers application f, alors la suite (f_n) converge dans $(\mathcal{C}([0,2], \mathbb{R}), \| \ \|_1)$ vers f.

5.4.1.2 pour aller plus loin

Exercice 5.6. :
1.Montrer que l'application φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui au vecteur de coordonnées (x, y) associe $\varphi(x, y) = \underset{t \in [0,1]}{sup} |x + ty|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Notons $\| \ \|_\varphi$ cette norme. Représenter l'ensemble des vecteurs de norme $\| \ \|_\varphi$ inférieure ou égale à 1 ?

[1] f est définie de $[0, 2]$ dans $\mathbb{R}$ mais on note encore f la "restriction" de f à [0,1], c'est à dire l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, $x \in [0, 1] \mapsto f(x)$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exercice 5.7.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que $f \longmapsto N(f)$ définie par :

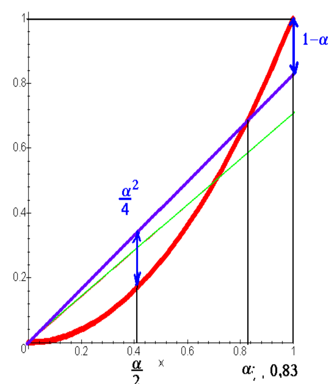
$$N(f) = |f(0)| + \sup_{\{t_1,\ldots,t_n\}\subset[0,1]} \sum_{i=1}^{i=n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

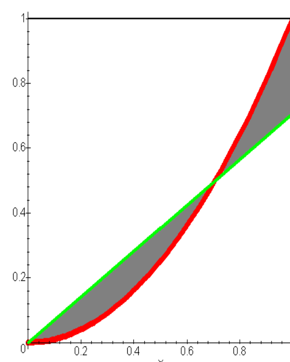
est une norme sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 5.8. *droite la plus proche d'une parabole donnée*
Dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on considère les applications h et g_α ,où α désigne un paramètre réel compris entre 0 et 1, définie par :

$$h(t) = t^2, \qquad\qquad g_\alpha(t) = \alpha t \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Calculer $\| h - g_\alpha \|_1$, $\| h - g_\alpha \|_\infty$, $\| h - g_\alpha \|_2$ en fonction de α.
2. Montrer qu'il existe une valeur de α_1 (resp α_∞, α_2) qui réalise le minimum de $(\alpha \longmapsto\| h - g_\alpha \|_1)$ sur $\mathbb{R}$ (resp. de $\alpha \longmapsto\| h - g_\alpha \|_\infty$, de $\alpha \longmapsto\| h - g_\alpha \|_2$)



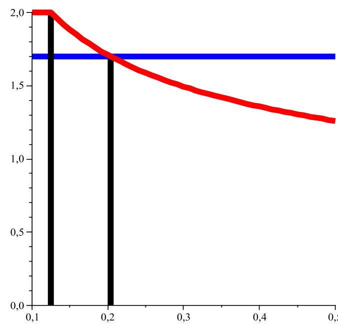


Exercice 5.9.

Soit pour tout entier non nul n, l'application f_n de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si} \quad 0 \leq x < n^{-3} \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} & \text{si} \quad n^{-3} \leq x \end{cases}$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.



1. Vérifier que les applications f_n sont continues.

2. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur]0,1]

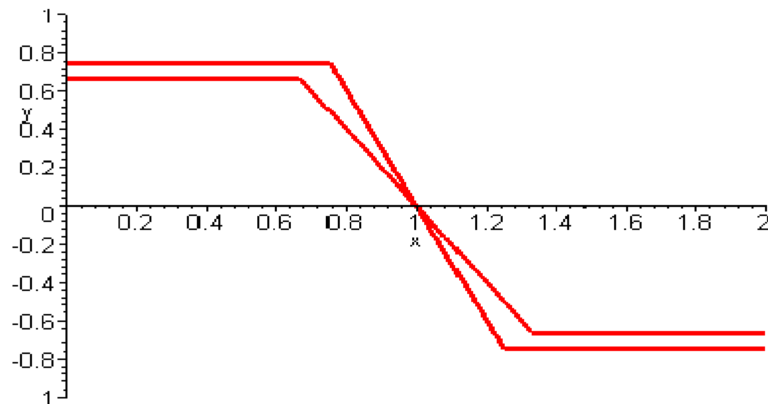
3. Montrer que la série des différences $\sum f_n - f_{n-1}$ converge absolument dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \| \|_1)$.
4. Vous pourrez admettre que la suite (f_n) ne converge pas dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \| \|_1)$. La démonstration se fait par l'absurde en supposant que la suite converge vers une fonction continue donc bornée sur $[0,1]$. Quelle propriété de $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \| \|_1)$ en déduisez-vous ?

5.4.1.3 vers un problème

Exercice 5.10.
On considère les suites d'applications (f_n) et (g_n) de [0,+2] dans $\mathbb{R}$ définies pour $n \geq 1$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \\ -n(x-1) \\ -1 \end{cases} \quad g_n(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{n} \\ (1-n)(x-1) \\ -1 + \dfrac{1}{n} \end{cases} \quad si \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 + \dfrac{1}{n} \\ 1 + \dfrac{1}{n} < x \leq 2 \end{cases}$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.



1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une application f que l'on définira et dont on tracera la courbe représentative.
2. Etude dans $(\mathcal{C}([0,2],\mathbb{R}), \|\|_\infty)$.
   (a) Tracer les courbes représentatives de f_2 et f_4.
   (b) Que vaut $f_n(1-\dfrac{1}{2n})$?
   (c) Vérifier $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{1}{2} \leq \| f_n - f_{2n} \|_\infty$
   (d) En déduire que la suite (f_n) n'est pas de Cauchy dans $(\mathcal{C}([0,2],\mathbb{R}), \| \; \|_\infty)$.
   (e) Montrer de deux manières que la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f ?
3. Etude de la série des différences dans $(\mathcal{C}([0,2],\mathbb{R}), \| \; \|_1)$
   (a) Vérifier que pour tout entier n non nul $\| f_n - f_{n-1} \|_1$ est égal au double de l'aire d'un triangle que l'on calculera.
   (b) Vérifier que la série $\sum\limits_{1 \leq n} (f_n - f_{n-1})$ converge normalement dans $(\mathcal{C}([0,2],\mathbb{R}), \| \; \|_1)$
4. Etude de la suite dans $(\mathcal{C}([0,2],\mathbb{R}), \| \; \|_1)$
   (a) Calculer pour p et q entiers non nuls $p < q \quad \| f_p - f_q \|_1$.
   (b) Vérifier que la suite (f_n) est de Cauchy dans $(\mathcal{C}([0,2],\mathbb{R}), \| \; \|_1)$
5. On se propose de montrer que la suite (f_n) ne converge pas dans $(\mathcal{C}([0,2],\mathbb{R}), \| \; \|_1)$. Pour cela, on raisonne par l'absurde, en supposant que la suite (f_n) converge dans $(\mathcal{C}([0,2],\mathbb{R}), \| \; \|_1)$ vers une application continue h.
   (a) On montre d'une part que la suite (f_n) restreinte à $[0,1]$ converge dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \| \; \|_1)$ vers l'application continue h restreinte à $[0,1[$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

(b) On montre de plus que la suite (f_n) restreinte à $[1,2]$ converge dans $(\mathcal{C}([1,2],\mathbb{R}), \| \|_1)$ vers l'application continue h restreinte à $[1,2[$.
(c) On montre que (f_n) restreinte à $[0,1]$ converge dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \| \|_1)$ vers 1.
(d) On montre que (f_n) restreinte à $[1,2]$ converge dans $(\mathcal{C}([1,2],\mathbb{R}), \| \|_1)$ vers -1
(e) On établit alors une contradiction en considérant $h(1)$. On en déduit que la suite (f_n) ne converge pas dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([0,2],\mathbb{R}), \| \|_1)$ qui n'est donc pas complet.

6. Les mêmes résultats peuvent être établis pour la suite (g_n).

5.4.2 Théorème du point fixe

5.4.2.1 apprentissage du cours

Exercice 5.11. [1] *L'utilisation de ce théorème dans une situation que vous connaissez bien* :

1. Montrer que l'équation

$$\varphi(x) = x^3 - 4x + 1 = 0 \tag{5.3}$$

admet trois racines réelles α_1,α_2,α_3 comprises entre -2,5 et -2, entre 0 et 0,5 et entre 1,5 et 2.

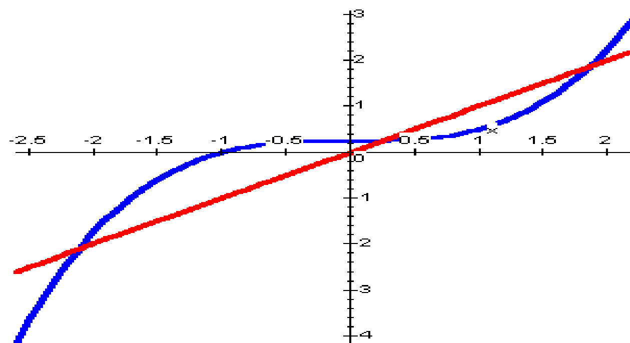
2. *Première tentative pour poser le problème de la détermination de ces racines en terme de recherche de point fixe*
On écrit l'équation sous la forme

$$\varphi_1(x) = x^3 - 3x + 1 = x \tag{5.4}$$

Le théorème du point fixe s'applique-t-il sur les intervalles [-2.5,-2], [0, 0.5] et [1.5,2] ?

[1] Emprunté à J.P. Demailly *Analyse numérique et équations différentielles* . Grenoble Sciences.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.



3. *Poser le problème de point fixe pour* α_2
   On introduit φ_2 définie par $\varphi_2(x) = \dfrac{x^3+1}{4} = x$.
   (a) Vérifier que le théorème du point fixe s'applique à φ_2 sur [0, 0,5].
   (b) La suite des itérés est $u_{n+1}=\varphi_2\ u_n$ et u_1=0,25 u_2=0,25390625 u_3=0,2540922314 u_4=0,254310123404 u_5=0,2541016662 u_6=0,2541016873. Déterminer un majorant de $|u_6-\alpha_2|$.
4. *Poser le problème de point fixe pour* α_1 *et* α_3
   Vérifier que α_1 et α_3 sont solutions de l'équation $\varphi_3(x) = \sqrt[3]{4x-1} = x$. Montrer que le théorème du point fixe s'applique à φ_3 sur les intervalles [-2,5,-2] et [1,5, 2].
5. Prolongements : Montrer que si λ est un réel distinct de -1 l'équation (1) a même point fixe que l'équation $\varphi_4(x) = x$ où $\varphi_4(x) = \dfrac{\varphi_1(x)+\lambda x}{1+\lambda}$.
   Le théorème du point fixe s'applique-t-il à φ_4 sur l'intervalle [-2,5 ,-2] pour une valeur de λ bien choisie ?

Exercice 5.12.

On se donne une application f définie sur $[0,1]$ strictement 1-lipschitzienne, c'est à dire telle que $\forall(x,y) \in [0,1]\times[0,1] \quad |f(x)-f(y)| < |x-y|$ et à valeurs dans $[0,1]$

1. Montrer que l'application sinus vérifie toutes ces hypothèses sans être contractante sur $[0,1]$.
2. Montrer que f admet au plus un point fixe dans $[0,1]$ et sachant que le théorème de point fixe de Brouwer[1] permet d'affirmer que f admet au moins un point fixe, en déduire que f a un et un seul point fixe. Quel est celui de l'application sinus ?

[1]Ce théorème, dû à Brouwer (1881-1966), est hors de votre programme. Il existe dif-

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exercice 5.13. *Résolution d'équations différentielles ramenées à la forme d'équations intégrales :*

$E = \mathcal{C}([0,1])$ et l'application φ de E dans E.

$$f \longrightarrow \varphi(f)/\forall x \in [0,1] \qquad \varphi(f)(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \cos f(t)\, dt$$

– Montrer que φ est contractante de rapport $\frac{1}{2}$ de $(E, \| \|_\infty)$ dans $(E, \| \|_\infty)$ en utilisant deux méthodes différentes. [1]
– Montrer qu'il existe une unique application f vérifiant $\varphi(f) = f$
– Quel est le problème d'évolution (équation differentielle et condition initiale) vérifié par f ?

Exercice 5.14. Vous pourrez utiliser le calcul de primitive et la valeur approchée suivante donnés par Maple :

$x < 1 \quad int(\frac{t^2-2t}{1-t}, t = 0..x);$		$\int_0^x \frac{t^2-2t}{1-t}dt = -1/2\,x^2 + \ln(1-x)$
$evalf(ln(2) - \frac{3}{8});$	$ln(2) - \frac{3}{8}$	$\approx 0.3181471806 < \frac{1}{3}$

On considère l'espace vectoriel E des applications continues de $[0, \frac{1}{2}]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\| \|_\infty$ définie par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,\frac{1}{2}]} \mid f(t) \mid .$$

1. Soit φ l'application de E dans E qui à une application f associe l'application $\varphi(f)$ définie par :

$$\forall x \in [0, \frac{1}{2}] \quad \varphi(f)(x) = 1 + \int_0^x \frac{t^2-2t}{1-t} f(t)dt.$$

   (a) Montrer que φ est contractante de rapport $k < \frac{1}{3}$ de $(E, \| \|_\infty)$ dans $(E, \| \|_\infty)$.

férents théorèmes de points fixes, c'est à dire qui exprime que l'équation $f(x) = x$ a une solution sous-réserve que f ait de bonnes propriétés. Le théorème de point fixe traité en cours est parfois appelé le théorème de point fixe de Picard(1856-1941)

[1]On pourra écrire : $\cos(f(t)) - \cos(g(t)) = 2\sin\big(\frac{1}{2}(f(t)+g(t))\big)\sin\big(\frac{1}{2}(f(t)-g(t))\big)$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

(b) Montrer que la suite itérée (f_n) définie par f_0 est la fonction nulle sur $[0,\frac{1}{2}]$ et $f_{n+1}=\varphi(f_n)$ converge dans $(\mathrm{E},\|\ \|_\infty)$ vers une application $\widehat{f}$.

(c) Montrer que $\widehat{f}$ est la solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$

$$\forall x\in[0,\frac{1}{2}]\quad y'(x)=\frac{x^2-2x}{1-x}y(x)$$

qui satisfait la condition initiale $y(0)=1$.

(d) Résoudre cette équation différentielle et déterminer $\widehat{f}$.

(e) Sachant que $\|\widehat{f}\|_\infty=1$, montrer $\|f_n-\widehat{f}\|_\infty\leq\frac{1}{3^n}$.

2. On considère une nouvelle application ψ de E dans E qui à toute application f associe l'application $\psi(f)$ définie par :

$$\forall x\in[0,\frac{1}{2}]\quad \psi(f)(x)=1-x+(1-x)\int_0^x f(t)dt.$$

(a) Montrer que ψ est contractante de $(\mathrm{E},\|\ \|_\infty)$ dans $(\mathrm{E},\|\ \|_\infty)$.

(b) Montrer que le point fixe, $\widehat{g}$, de ψ est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ et en déduire que $\widehat{f}=\widehat{g}$.

Exercice 5.15. *Equations fonctionnelles* :
$\mathrm{E}=(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

1. En appliquant le théorème du point fixe dans $(\mathrm{E},\|\ \|_\infty)$ à une fonction φ bien choisie de E dans E, montrer qu'il existe une unique application y élément de E telle que :

$$\forall x\in[0,1]:\qquad y(x)=\frac{1}{2}y(x^2)+x$$

2. Calculer $\varphi(Id)$,$\varphi\circ\varphi(Id)$.
3. Montrer que la série $\sum\frac{x^{2^k}}{2^k}$ converge uniformément sur $[0,1]$.
4. Vérifier que

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2^k}}{2^k}$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

5.4.2.2 pour aller plus loin

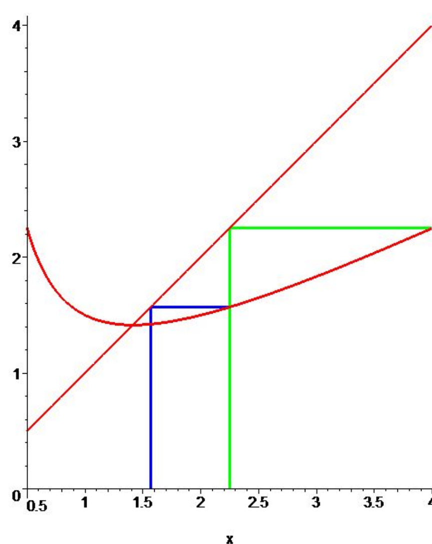
Exercice 5.16. *approximations de* $\sqrt{2}$:
Nous avons introduit en cours la démonstration du théorème du point fixe à partir de l'étude de l'algorithme de calcul suivant :

$$1 \leq x_0 \leq 2 \quad et \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$

Voici ce calcul dans Matlab

valeurs affichées pour a=2	valeurs affichées pour a=4	
résolution de x/2 + 1/x = x	2.00000000000000	4.00000000000000
format long	1.50000000000000	2.25000000000000
N = 20 ; nombre d'itérations	1.41666666666667	1.56944444444444
a=2 ;boucle sur les itérations	1.41421568627451	1.42189036381514
x(1)=[a] ;	1.41421356237469	1.41423428594007
for n = 1 :(N)	1.41421356237309	1.41421356252493
x(n+1)=x(n)/2+1/x(n) end	1.41421356237309	1.41421356237309

Cependant nous avons remarqué en (5.1.4)que la série des différences tend vers 0 beaucoup plus rapidement que le résultat qui sous-tend la démonstration du théorème du point fixe pour un rapport de contraction $\frac{1}{2}$, à savoir par la série $\frac{1}{2^n}|y_1|$. Nous tentons ici d'obtenir une majoration plus fine qui explique la rapidité de convergence de la suite récurrente (x_n) vers $\sqrt{2}$.
1. Soit f l'application définie de $[1, 2]$ dans $[1, 2]$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$. Vérifier que $f'(\sqrt{2}) = 0$ et montrer que f'' est majorée par 2 sur $[1, 2]$.
2. Majorer $|f(x) - \sqrt{2}|$ par $\frac{|x - \sqrt{2}|^2}{2}$ et en déduire une majoration de $|x_n - \sqrt{2}|$ par $|x - \sqrt{2}|^{2^p}$. Conclure.



© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exercice 5.17. *équations différentielles- équations intégrales* :

1. ($E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, en appliquant le théorème du point fixe dans $(E, \| \|_{infty})$ à une fonction φ bien choisie de E dans E, montrer qu'il existe une unique application y élément de E telle que :

$$\forall x \in [0,1] : \qquad y(x) = 1 + 2\int_0^x \frac{ty(t)}{1+t^2}\,dt$$

2. Montrer que y est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on résoudra.
3. On pose

$$\forall x \in [0,1] : \qquad u_0(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1}(x) = 1 + 2\int_0^x \frac{tu_n(t)}{1+t^2}\,dt$$

Calculer $u_n(x)$ pour $x \in$ [0,1].

4. Montrer que la suite de fonctions (f_n), $n \in \mathbb{N}$ définie par

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}(\ln(1+x^2))^k$$

converge uniformément vers $f(x) = 1+x^2$ sur [0,1] et majorer $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 1 - x^2|$.

Exercice 5.18.

Dans tout cet exercice r désigne un entier supérieur ou égal à 1.

1. préliminaire :
   Montrer que l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ qui à u associe ln(1+u) est lipschitzienne de rapport 1.

2. E_1 désigne l'espace vectoriel des applications définies continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$.
   On suppose dans toute cette question que E_1 est muni de la norme $\| \quad \|_\infty$.
   (a) Montrer que l'application ϕ qui à tout élément f de E_1 associe l'élément $\phi(f)$ de E_1 [1] défini par :

$$\forall x \in [0,1] \quad \phi(f)(x) = \int_0^x \quad s^r \quad ln(1+|f(s)|) \quad ds$$

   est contractante.

[1] on ne demande pas d'établir ce résultat

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

(b) En déduire que ϕ admet un unique point fixe h.

(c) Vérifier que h est solution sur [0,1] de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ que l'on peut écrire $h'(x) = x^r ln(1 + h(x))$

3. E_2 désigne l'espace vectoriel des applications définies continues de [0,2] dans $\mathbb{R}$. On note désormais dans toute la suite ϕ l'application qui à tout élément f de E_2 associe l'élément $\phi(f)$ de E_2 [1] défini par :

$$\forall x \in [0,2] \quad \phi(f)(x) = \int_0^x \quad s^r \quad ln(1 + |f(s)|) \quad ds$$

(a) Montrer que l'application N de E_2 dans $\mathbb{R}^+$ qui à f élément de E_2 associe $N(f) = \|F\|_\infty^{[0,2]}$ où $F(x) = f(x)e^{-2^{(r+1)}x}$ définit une norme sur E_2.

(b) On se propose de montrer que ϕ est contractante de l'espace vectoriel E_2 muni de la norme N dans lui-même.

i. Calculer $\int_0^x 2^r e^{2^{(r+1)}(s-x)} ds$

ii. Vérifier que si f et g dont des éléments de E_2, $N(\phi(f) - \phi(g))$ est égale à la norme infinie de l'application

$$x \longmapsto \int_0^x s^r e^{2^{(r+1)}(s-x)} \quad (ln(1+|f(s)|)-ln(1+|g(s)|))e^{2^{(r+1)}(-s)}ds$$

iii. En déduite que $N(\phi(f) - \phi(g)) \leq \frac{1}{2}N(f - g)$.

(c) Vérifier que l'on peut appliquer le théorème du point fixe à ϕ dans l'espace vectoriel normé (E_2,N)

(d) En déduire que l'application h définie dans la question précédente peut être prolongée en une application solution de $(\mathcal{E})$ sur [0,2].

5.4.3 Equivalence de normes

5.4.3.1 apprentissage du cours

Exercice 5.19.
On a défini en cours les normes $\| \|_1$ et $\| \|_\infty$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

1. Montrer que

$$\forall f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \qquad \| f \|_1 \leq \| f \|_\infty .$$

[1] on ne demande pas d'établir ce résultat

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

2. Si f_n est définie par $f_n(x) = x^n$, que vaut $\| f_n \|_1$? En déduire qu'il n'existe pas de constante β telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \qquad \| f \|_\infty \leq \beta \| f \|_1$$

3. Montrer directement en étudiant la suite (f_n) que les normes $\| \|_1$ et $\| \|_\infty$ de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ ne sont pas équivalentes.
4. Etudier la suite (f_n) dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{K}), \| \quad \|_2)$.

5.4.3.2 pour aller plus loin

Exercice 5.20.
Nous avons défini dans l'exercice 5.4 les normes ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, ν_5 et ν_6, sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n$[X] des polynômes de degré inférieur ou égal à n, :

$$\nu_1(P) = \sup_{0\leq p\leq n} | a_p | \qquad \nu_2(P) = \sum_{p=0}^{p=n} | a_p | \qquad \nu_3(P) \sup_{0\leq t\leq 1} | P(t) |=$$

$$\nu_4(P) = \int_0^1 | P(t) | \, dt \qquad \nu_5(P) = (\int_0^1 | P^2(t) | \, dt)^{\frac{1}{2}} \qquad \nu_6(P) =| P(0) | + \sup_{0\leq t\leq 1} | P'(t) |$$

a Montrer que ces normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}_n$[X].
b Montrer $\forall P \in \mathbb{R}[X]$:
$\nu_1(P) \leq \nu_2(P)$
$\nu_4(P) \leq \nu_5(P) \leq \nu_3(P) \leq \nu_2(P) \leq$ et
$\nu_3(P) \leq \nu_6(P)$
c Montrer que les normes ν_1 et ν_2, ν_1 et ν_3, ν_5 et ν_6, ν_4 et ν_5 ne sont pas équivalentes sur $\mathbb{R}$[X]
d Trouver la plus petite valeur de β telle que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$:
$\nu_1(P) \leq \nu_2(P) \leq \beta\nu_1(P)$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

5.4.3.3 Continuité-limite

5.4.3.4 apprentissage du cours

Exercice 5.21.
Soit k un réel positif, et $a = (0, 0)$.
1. Etudier la continuité en a de f_k de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(a) = 0 \\ f_k(x) = \dfrac{x_1^k x_2}{x_1^2 + x_2^2} \quad x = (x_1, x_2) \neq a \end{cases}$$

2. Etudier la limite en a de g_k définie de $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$g_k(x) = \frac{x_1^k x_2 \exp(x_1 + x_2)}{x_1^2 + x_2^2} \quad x = (x_1, x_2) \neq a$$

Indication : Utiliser la norme $\| \|_2$ en notant $r = \|x - a\|_2$ et en écrivant $x = (x_1, x_2) = (rcost, rsint)$.

Exercice 5.22.
2. Etudier si l'application f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x, y, z) = \frac{x + y + z}{|x| + |y| + |z|} \quad (x, y, z) \neq a$$

admet une limite en $a = (0, 0, 0)$. 1. Montrer en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que :

$$|xy + yz + zx| \leq \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}\sqrt{(y^2 + z^2 + x^2)}$$

2. Etudier si l'application g définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$g(x, y, z) = \frac{xy + xz + yz}{|x| + |y| + |z|} \quad (x, y, z) \neq a$$

admet une limite en $a = (0, 0, 0)$.

5.4.3.5 pour aller plus loin

Exercice 5.23.
Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{y}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en un point de la forme $(0, y)$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exercice 5.24.
Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux applications u et v de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues en 0 et telles que $u(0) = 0$ et $v(0) = 0$.

1. Montrer, en raisonnant par contraposée, que si l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $(t \mapsto f(u(t), v(t))$ est discontinue au point 0 alors f est discontinue au point $a = (0, 0)$.
2. Montrer que l'application f_2 de l'exercice (5.21) n'est pas continue en $a = (0, 0)$ en choisissant convenablement les applications u et v.

5.4.3.6 pour aller beaucoup plus loin

Exercice 5.25.

1. Montrer que si f est une application lipschitzienne de rapport k de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, on sait définir :

$$F(x) = \int_0^1 f(xt)dt \qquad \text{pour} \qquad 0 \leq x \leq 1$$

2. Montrer que l'application F ainsi définie sur [0,1] prend la valeur $f(0)$ en 0 et est continue en 0.

3. Vérifier que

$$x \neq 0 \Longrightarrow F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$$

4. En déduire que F est continue sur [0,1]

5. L'application φ qui à f associe F est-elle linéaire ?
6. φ est-elle continue de $(\mathcal{C}([0, 1]), \| \quad \|_\infty)$ dans $(\mathcal{C}([0, 1]), \| \quad \|_\infty)$?
7. φ est-elle continue de $(\mathcal{C}([0, 1]), \| \quad \|_1)$ dans $(\mathcal{C}([0, 1]), \| \quad \|_\infty)$?

Indications Pour 2. Majorer $F(x) - \int_0^1 f(0)dt$.
Pour 7. Utiliser $F(0) = f(0)$ et une suite (f_n) qui tend vers l'application nulle dans $(\mathcal{C}([0, 1]), \| \quad \|_1)$.

Exercice 5.26.
Dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\| \|_2$ définie par :

$$P = \sum_{p=0}^{n} a_p X^p \longmapsto \| P \|_2 = \sqrt{\sum_{p=0}^{n} a_p^2}$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

On considère l'application φ de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(P) = P(1)$. Etudier la continuité de φ de $(\mathbb{R}[X], \| \|_2)$ dans $(\mathbb{R}, | |)$ en $0_{\mathbb{R}[X]}$.

5.4.3.7 pour en savoir plus

Exercice 5.27.
Soient f et g des applications de $(\text{E}, \| \|)$ dans $(\mathbb{R}, | |)$, montrer que si f et g sont continues alors il en est de même de $\sup(f, g)$.

Exercice 5.28.
Soient f une application de $(\text{E}, \| \|)$ dans $(\mathbb{R}, | |)$, montrer que si f est continue en a alors il existe un entier n tel que f soit bornée sur la boule de centre a et de rayon $\frac{1}{n}$.

5.4.4 Ouverts, fermés, fermés bornés

5.4.4.1 apprentissage du cours

Exercice 5.29.
Précisez parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ ceux qui sont fermés, ceux qui sont ouverts.

1. le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < y\}$.
2. le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y\}$.
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = mx\}$ m réel donné.
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 1\}$.
5. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0 \quad et \quad -1 \leq xy\}$.
6. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0 \quad et \quad xy \leq -1\}$.
7. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 0 \quad et \quad xy \leq -1\}$.
8. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \mid 2x + 3y \mid \leq 1\}$.
9. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x^2 + 3y^2 \leq 1\}$.
10. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x = n^{-1}, y = n^{-1}) : n \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 5.30. Montrer que :

1. Toute partie de E incluse dans une partie bornée de $(E, \| \|)$ est une partie bornée de $(E, \| \|)$.
2. L'intersection de deux fermés A et B de $(E, \| \|)$ est un fermé de $(E, \| \|)$.
3. En déduire que l'intersection d'un fermé A $(E, \| \|)$ et d'une boule fermée B de $(E, \| \|)$ est un fermé borné de $(E, \| \|)$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

5.4.4.2 pour aller plus loin

Exercice 5.31. *distances à un fermé, à une droite*
Soit A un fermé de $\mathbb{R}^2$ muni d'une norme $\| \|$, $a = (a_1, a_2)$ un élément de A et $y = (y_1, y_2)$ un élément de $\mathbb{R}^2$. On note B la boule fermée de centre y et de rayon $\| y - a \|$.

1. Faire un dessin représentant A, a, y et B lorsque A est la droite vectorielle $\{(x_1, x_2)/x_2 = mx_1\}$, $a = (1, m)$ et $y = (1, 0)$ et que la norme choisie est $\| \|_2$, puis lorsque la norme choisie est $\| \|_\infty$.
2. Faire de même un dessin lorsque $A = A_1 \bigcup A_2$ où $A_1 = \{(x_1, x_2)/ |x_1| \leq 1\}$ et $A_2 = \{(x_1, x_2)/ |x_2 - 2| \leq 1\}$, $a = (1, 2)$ et $y = (2, 0)$.
3. Montrer que l'application $x \mapsto \| x - y \|$ a un minimum sur $A \cap B$ atteint en au moins un point z de A. La norme $\| z - y \|$ est alors appelée la distance de y à A notée $d(y, A)$.
   Vérifier que $\forall x \in A \quad d(y, A) \leq \| x - y \|$ et en déduire que
   $$d(y, A) = \underset{x \in A}{min}\{\| x - y \| /x \in A\}$$
4. Vérifier que $d(y, A)$ est nul si et seulement si $y \in A$.
5. Déterminer $d(y, A)$ lorsque A est la droite vectorielle $\{(x_1, x_2)/x_2 = mx_1\}$, $a = (1, m)$ et $y = (1, 0)$ et que la norme choisie est $\| \|_2$. Vérifier que, dans ce cas, z est défini de manière unique et est la projection orthogonale de y sur le sous-espace vectoriel A.
6. Déterminer $d(y, A)$ lorsque A est la droite vectorielle $\{(x_1, x_2)/x_2 = mx_1$, $a = (1, m)$ et $y = (1, 0)$ et que la norme choisie est $\| \|_\infty$.
7. Reprendre le second dessin et trouver une valeur de y pour lequel le minimum $\{\| x - y \| /x \in A\}$ est atteint en plusieurs points pour la norme $\| \|_2$.

5.4.4.3 pour en savoir plus

Exercice 5.32.
En considérant les fermés $I_n = [\frac{1}{n}, +\infty[$, de $\mathbb{R}$ vérifier que la réunion d'un nombre infini de fermés n'est pas nécessairement un fermé.

Exercice 5.33.
Montrer que l'intersection d'une famille quelconque de fermés $\{F_i \quad i \in J\}$ de $(E, \| \|_E)$ est un fermé de $(E, \| \|_E)$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Exercice 5.34.
Soit $(E, \| \|)$ en espace vectoriel normé.

1. Montrer que toute partie finie de $(E, \| \|)$ est bornée.
2. Montrer que toute partie A de $(E, \| \|)$ incluse dans une boule de centre a et de rayon $r > 0$ est bornée.
3. Montrer que si (x_n) est une suite convergente de $(E, \| \|_E)$ de limite a alors $\{x_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-ensemble borné de $(E, \| \|_E)$. normé.

Exercice 5.35.
Soit f_n l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si} \quad x < n^{-3} \\ x^{-\frac{1}{3}} & \text{si} \quad n^{-3} < x \end{cases}$$

Montrer que $\{f_n/n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non bornée de $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\|\|_\infty)$, une partie bornée de $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\|\|_1)$ et de $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\|\|_2)$.

5.4.5 Normes matricielles

5.4.5.1 apprentissage du cours

Exercice 5.36.
Sachant que $||| \, |||$ est une norme matricielle induite par une norme de $\mathbb{R}^n$, montrer que pour toute matrice A le rayon spectral $\rho(A)$ de cette matrice vérifie :

$$\rho(A) \leq ||| \, A \, |||$$

.

Exercice 5.37.
Soit g et h les applications linéaires définies respectivement dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par les matrices $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}$

1. Déterminer $||| \, g \, |||_\infty$, $||| \, g \, |||_2$ et $||| \, g \, |||_1$
2. Déterminer $||| \, h \, |||_\infty$, $||| \, h \, |||_2$ et $||| \, h \, |||_1$

Exercice 5.38.
Soit f l'application linéaire de $(\mathbb{R}^2, \| \|)$ dans $(\mathbb{R}^2, \| \|)$ qui a pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

1. Rappeler la définition de $||| f |||_\infty$, $||| f |||_2$ et $||| f |||_1$.
2. Calculer chacune des normes $||| f |||_\infty$, $||| f |||_2$ et $||| f |||_1$ en fonction de a et préciser si f est ou non contractante dans chacun de ces cas.
3. Quelle est la limite de $||| f |||_\infty$, $||| f |||_2$ et $||| f |||_1$ lorsque a tend vers $+\infty$?

5.4.5.2 pour aller plus loin

Exercice 5.39. Conditionnement d'une matrice
Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ de matrice carrée A dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On adopte dans cet exercice les notations usuelles $f(x) = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
On rappelle l'expression de la norme de la matrice A notée $||| A |||_1$:

$$||| A |||_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq i \leq p} | a_{ij} |$$

qui est induite par la norme de vecteurs notée $\| X \|_1 = |x_1| + |x_2|$.

1. Dans cette première question nous étudions le cas particulier où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1000 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Calculer $||| A |||_1$?
   (b) Montrer que A est inversible.
   (c) Calculer l'inverse A^{-1} de la matrice A et donner $||| A^{-1} |||_1$?
   (d) On se donne $B = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \end{pmatrix}$. Résoudre les systèmes $AX = B$ et $AX' = B'$.
   Que valent $\delta X = \dfrac{\| X - X' \|_1}{\| X \|_1}$ et $\delta B = \dfrac{\| B - B' \|_1}{\| B \|_1}$?
2. On revient au cas général où A est une matrice quelconque inversible, B est non nul et où $\| \, \|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$. Etant données les solutions X et X' de $AX = B$ et $AX' = B'$, on se propose de comparer l'accroissement relatif $\delta X = \dfrac{\|X' - X\|}{\|X\|}$ de la solution en fonction de celui $\delta B = \dfrac{\|B' - B\|}{\|B\|}$ du second membre de l'équation.
   (a) Soit $||| A |||$ la norme de la matrice A induite par la norme $\| \, \|$, pourquoi a-t-on :

$$\| B \| \leq ||| A ||| \cdot \| X \| \quad ?$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

(b) Soit $||| A^{-1} |||$ la norme de la matrice A^{-1} induite par la norme $\| \|$, pourquoi a-t-on :

$$\| X' - X \| \leq ||| A^{-1} ||| \cdot \| B' - B \| ?$$

(c) En déduire :

$$\delta X \leq ||| A ||| \cdot ||| A^{-1} ||| \, \delta B.$$

(d) Que doivent vérifier $||| A |||$ et $||| A^{-1} |||$ pour que δX et δB aient le même ordre de grandeur ? Est-ce le cas de la matrice A étudiée dans la première question ?

Exercice 5.40. *Méthode de Jacobi*
Etant données une matrice carrée A de $\mathcal{M}_{,n}(\mathbb{R})$ et une matrice colonne B de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, on se propose de résoudre l'équation AX=B par une méthode de point fixe.
On suppose écrit A=M+N où M est une matrice inversible dont l'inverse est facile à calculer :

$$AX = B \Leftrightarrow (M + N)X = B \Leftrightarrow MX = -NX + B$$

$$MX = -NX + B \Leftrightarrow X = -M^{-1}NX + M^{-1}B$$

Dans la méthode de Jacobi, on suppose les coefficients diagonaux de A non nuls et on choisit M=D où D est la matrice diagonale formée des termes diagonaux de A :

$$AX = B \Leftrightarrow X = f(X) \text{ avec } f(X) = JX + D^{-1}B \text{ où } J = D^{-1}(A - D)$$

1. On prend
$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \qquad et \qquad B = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \end{bmatrix}$$
2. On prend
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} \qquad et \qquad B = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \end{bmatrix}$$

– Dans lequel de ces deux cas peut-on appliquer la méthode de Jacobi pour résoudre le système AX=B ?
– Donner dans ce cas la solution exacte du sytème (1) puis déterminer les quatre premiers termes de la suite itérative obtenue par le théorème du point fixe à partir de $X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

Indications Dans le premier cas

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad M^{-1} = \begin{bmatrix} 10^{-1} & 0 \\ 0 & 10^{-1} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{2}{10} \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad ||| J |||_1 = \frac{2}{10} < 1$$

Exercice 5.41.

1. On dit que la matrice carrée A de coefficients (a_{ij}) est à diagonale strictement dominante si

$$\forall i \in [1, n] \qquad | a_{i,i} | < \sum_{1 \leq j \leq n \quad j \neq i} | a_{i,j} |$$

   – On rappelle que la matrice A est inversible, montrer en utilisant une norme induite convenablement choisie que dans ce cas on peut appliquer la méthode de Jacobi décrite ci-dessus.
   – Appliquer cette méthode en partant du vecteur nul dans le cas

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad et \qquad B = \begin{bmatrix} 19 \\ 19 \\ -3 \\ -12 \end{bmatrix}$$

   Déterminer la solution exacte de ce système.
   Ecrire l'algorithme de Jacobi pour résoudre ce système avec Maple.
   La méthode de Jacobi converge-t-elle rapidement dans ce cas ?

2. On suppose $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
   Ecrire l'algorithme de Jacobi et vérifier qu'il donne dans ce cas la solution exacte en trois itérations.

Réponse :
algorithme

```
with(LinearAlgebra) ;
```


© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.

```
V := Vector([0, 0, 0, 0]) ;
E := Vector([-19/3, 19/3, -1/2, -12*1/3])
```

$$V := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E := \begin{bmatrix} -\frac{19}{3} \\ \frac{19}{3} \\ -1/2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

```
for i from 1 by 1 while i< 10
do V := MatrixVectorMultiply(M, V)+E
end do ;
V
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{378245}{78732} \sim -4.804 \\ \frac{90395}{19683} \sim -4.592 \\ -\frac{22357}{52488} \sim -.425 \\ -\frac{54337}{13122} \sim -4.140 \end{bmatrix}$$

solution exacte

```
solve(-3*x+y = 19, -x+3*y-z = 19, -y+6*z-t = -3, -z+3*t = -12,
[x, y, z, t]) ;
```

$$[[x = -\frac{610}{127}, y = \frac{583}{127}, z = -\frac{54}{127}, t = -\frac{526}{127}]$$

$$[[x \sim -4.803, y \sim -4.590, z \sim -0.425, t \sim -4.142]]$$

© [M. PICQ], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés.